COURS DE GÉOMÉTRIE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

LEÇONS
SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE
DES SURFACES
ET LES
APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INFINITÉSIMAL,

PAR

GASTON DARBOUX,
MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

DEUXIÈME PARTIE.

LES CONGRUENCES ET LES ÉQUATIONS LINÉAIRES
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.
DES LIGNES TRACÉES SUR LES SURFACES.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1889

PRÉFACE.

Cette seconde Partie de mon Ouvrage se compose seulement de deux Livres.

Le Livre IV, qui traite des *congruences* et des *équations linéaires aux dérivées partielles,* est presque entièrement consacré à des développements d'analyse qui trouveront plus tard une application presque immédiate dans l'étude de deux questions importantes : la déformation infiniment petite d'une surface quelconque et la détermination des surfaces admettant une représentation sphérique donnée.

Le Livre V, qui traite des *lignes tracées sur les surfaces,* contient, en particulier, la démonstration des belles formules que nous devons à M. Codazzi. L'étude des lignes géodésiques s'y trouve commencée, mais non terminée. J'ai surtout insisté sur les rapprochements qui se présentent ici entre les méthodes employées par Gauss dans l'étude des géodésiques et celles que Jacobi a appliquées plus tard aux problèmes de la Mécanique analytique. J'ai pu ainsi mettre en évidence tout l'intérêt que présentent les belles découvertes de Jacobi lorsqu'on les envisage à un point de vue plus particulièrement géométrique.

Je m'empresse de remercier, en terminant, M. Paul Morin, professeur à la Faculté des Sciences de Rennes, et M. Édouard Goursat, Maître de Conférences à l'École Normale, qui ont bien voulu me prêter leur concours le plus dévoué dans la correction des épreuves.

28 octobre 1888.

ERRATA.

Première Partie.

Page 31, ligne 6 en remontant, *au lieu de* [p. 12], *lisez* [p. 22].

Page 32, formule (4), changer le signe du second membre. Formules (5) et suivantes, échanger $\sin^2\frac{MM'}{2}$ et $\cos^2\frac{MM'}{2}$.

Page 40, dernière ligne, *au lieu de* [p. 13], *lisez* [p. 22].

Page 65, ligne 7 en remontant, *au lieu de* $F(u_0, v_0, u, v, t)$, *lisez* $F(u_0, v_0, u', v', t)$.

Page 69, dernière formule, *au lieu de* $B(du\,\delta v + C\,dv\,\delta u)$, *lisez*

$$B(du\,\delta v + dv\,\delta u).$$

Page 76, ligne 5 en remontant, *au lieu de* $\frac{dr}{r\sqrt{1+f^2}}$, *lisez* $\frac{dr}{r}\sqrt{1+f^2}$.

Page 336, seconde formule (26), *au lieu de* $\mathfrak{F}_1\left(\frac{m_0u_1 + n_0}{nu + m}\right)$, *lisez* $\mathfrak{F}_1\left(\frac{m_0u_1 + n_0}{m + nu_1}\right)$.

Page 364, ligne 6 de la note, *ajouter* des cordes *après le mot* milieux.

Page 367, ligne 22, *au lieu de* l'ordre est, *lisez* la classe est un nombre.

Seconde Partie.

Page 115, dernière formule (45) et dernière formule (46), *au lieu de* λ_n, *lisez* λ_{n-1}.

Page 127, lignes 14 et 17, changez les signes des seconds membres des équations.

Page 282, ligne 10, *au lieu de* MB', *lisez* M'B'.

Page 298, formule (34), changer le signe du terme en $\frac{d^2\theta}{dx\,d\beta}$.

Page 309, changer le signe du second membre dans l'équation (62) et dans la précédente.

Page 312, changer le signe des termes qui contiennent les dérivées premières de θ dans le système (75).

B, qui sont définis par l'équation (16) jointe aux deux suivantes :

$$(17)\qquad \sum \frac{\partial u_i}{\partial \rho} x_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial u_i}{\partial \rho_1} x_i = 0.$$

Si l'on fait varier infiniment peu ρ et ρ_1, on aura deux nouveaux points de contact A' et B'; cherchons la condition pour que les quatre points A, B, A', B' soient sur un même cercle et, par suite, dans un même plan.

L'équation générale des sphères passant par les points A et B est évidemment

$$(18)\qquad \sum \left(\lambda u_i + \mu \frac{\partial u_i}{\partial \rho} + \mu_1 \frac{\partial u_i}{\partial \rho_1}\right) x_i = 0,$$

λ, μ, μ_1 étant trois arbitraires. Pour que l'une de ces sphères contienne les points A', B', il faudrait que l'on ait

$$(19)\qquad \sum \left(\lambda u_i + \mu \frac{\partial u_i}{\partial \rho} + \mu_1 \frac{\partial u_i}{\partial \rho_1}\right) dx_i = 0,$$

lorsqu'on passera de A à A' ou de B à B'.

Or, si l'on différentie les équations (16) et (17), on trouvera, en tenant compte de l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont les cinq quantités u_i,

$$\sum u_i\, dx_i = 0,$$

$$\left(\sum \frac{\partial^2 u_i}{\partial \rho^2} x_i\right) d\rho + \sum \frac{\partial u_i}{\partial \rho} dx_i = 0,$$

$$\left(\sum \frac{\partial^2 u_i}{\partial \rho_1^2} x_i\right) d\rho_1 + \sum \frac{\partial u_i}{\partial \rho_1} dx_i = 0.$$

L'emploi de ces formules permet de ramener l'équation (19) à la forme

$$(19)_a\qquad \mu \left(\sum \frac{\partial^2 u_i}{\partial \rho^2} x_i\right) d\rho + \mu_1 \left(\sum \frac{\partial^2 u_i}{\partial \rho_1^2} x_i\right) d\rho_1 = 0;$$

et cette nouvelle équation devra être vérifiée lorsqu'on y remplacera les quantités x_i par les coordonnées des points A et B. Cela ne peut arriver, en général, que si l'équation est identiquement vérifiée, ce qui donne les deux conditions

$$\mu\, d\rho = 0, \qquad \mu_1\, d\rho_1 = 0.$$

On obtient donc les deux solutions

$$\mu = 0, \qquad d\rho_1 = 0;$$
$$\mu_1 = 0, \qquad d\rho = 0.$$

Pour la première, par exemple, on a

$$d\rho_1 = 0,$$

et les sphères représentées par l'équation

$$(20) \qquad \sum\left(\lambda u_i + \mu_1 \frac{\partial u_i}{\partial \rho_1}\right) x_i = 0$$

passent, quel que soit le rapport $\frac{\lambda}{\mu_1}$, par les quatre points A, B, A′, B′. Ces quatre points sont donc sur un cercle, et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Sur toute enveloppe de sphères à deux paramètres, il y a en général deux séries de lignes que nous appellerons lignes principales *de l'enveloppe; elles sont définies par cette propriété que, lorsqu'on se déplace sur l'une d'elles, les quatre points de contact des deux sphères infiniment voisines avec l'enveloppe soient sur un même cercle que nous appellerons* cercle principal. *Les lignes principales sont les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles qui admet comme solutions particulières les cinq coordonnées homogènes des sphères variables* [1].

Lorsque les quatre points de contact, deux à deux infiniment voisins, A, B, A′, B′ sont sur un même cercle, les cordes de contact AB, A′B′ se rencontrent; par suite, les plans focaux de la droite

[1] Nous avons admis que la sphère représentée par l'équation $(19)_a$ ne peut contenir, quand le rapport $\frac{\mu_1\, d\rho_1}{\mu\, d\rho}$ varie, les deux points A et B. Cela est vrai, en général; mais on reconnaîtra aisément qu'il n'en est plus de même dans le cas exceptionnel où les cinq fonctions

$$\sum u_i x_i, \quad \sum \frac{du_i}{d\rho} x_i, \quad \sum \frac{du_i}{d\rho_1} x_i, \quad \sum \frac{d^2 u_i}{d\rho^2} x_i, \quad \sum \frac{d^2 u_i}{d\rho_1^2} x_i$$

ne sont pas linéairement indépendantes. Mais alors les quantités u_i ne seront pas linéairement indépendantes; l'enveloppe sera une surface anallagmatique, les cordes de contact des sphères iront passer par un point fixe, et les lignes principales seront indéterminées.

AB sont tangents, sur les deux nappes, aux lignes principales; *ces lignes se trouvent donc sur les développables de la congruence engendrée par la corde de contact des sphères*. Cette proposition pourrait leur servir de définition; mais elle mettrait moins bien en évidence la propriété essentielle des *lignes principales* qui est de *se conserver par l'inversion*, comme le montre immédiatement la définition que nous avons adoptée.

D'après les résultats précédents et la formule (20), l'un des cercles principaux aura pour équations

$$(21)\qquad \sum u_i x_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial u_i}{\partial \rho_1} x_i = 0;$$

et, si l'on rapproche ces résultats de ceux que nous avons obtenus au n° 470, on reconnaîtra immédiatement que toute congruence de cercles dans laquelle chaque cercle est rencontré par deux cercles infiniment voisins seulement est formée par les cercles principaux d'une enveloppe de sphères.

473. C'est ici le lieu de faire connaître une proposition qui est due à M. Ribaucour ([1]).

Considérons une surface (Σ) et soient x, y, z les coordonnées d'un de ses points. L'équation

$$(22)\qquad X^2 + Y^2 + Z^2 - 2xX - 2yY - 2zZ + x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

représente une sphère ayant son centre sur la surface. Supposons que la valeur de R soit déterminée pour chaque point de la surface; la sphère enveloppera une des surfaces à deux nappes que nous venons de considérer d'une manière générale. Nous allons montrer que les lignes principales de cette enveloppe correspondent à un système conjugué tracé sur (Σ).

Prenons comme variables les paramètres ρ, ρ_1 du système conjugué qui correspond à la fonction $x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ (n° 107) [I, p. 135]. Alors les fonctions

$$1,\ x,\ y,\ z,\ x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$

([1]) A. Ribaucour, *Sur une propriété des surfaces enveloppes de sphères* (*Comptes rendus*, t. LXVII, p. 1334; 1868).

satisferont à une équation linéaire de la forme (11) et le premier membre de l'équation (22) sera un cas particulier de l'expression générale définie par l'équation (13), correspondant aux valeurs précédentes des fonctions a_i. Les formules (12) deviendront ici

$$(23)\quad \begin{cases} (X - x)\dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \ldots + R\dfrac{\partial R}{\partial \rho} = 0, \\ (X - x)\dfrac{\partial x}{\partial \rho_1} + \ldots + R\dfrac{\partial R}{\partial \rho_1} = 0. \end{cases}$$

Elles définissent la *corde de contact* de la sphère variable (22) avec son enveloppe. Si l'on remarque maintenant que, d'après la théorie générale, les deux plans représentés par les équations précédentes sont les *plans focaux* de cette corde de contact, on sera conduit au théorème de M. Ribaucour :

Si une sphère variable dépend de deux paramètres, la corde de contact de cette sphère avec son enveloppe engendre une congruence dont les développables correspondent à deux familles de courbes conjuguées tracées sur la surface des centres (Σ), *et les tangentes à ces courbes en un point de* (Σ) *sont perpendiculaires aux plans focaux de la corde correspondante.*

En adoptant les définitions précédentes, nous voyons que les cercles principaux de l'enveloppe ont pour *axes* les tangentes aux deux familles de courbes conjuguées tracées sur la surface des centres.

474. Si l'on examine la démonstration que nous avons donnée du théorème de M. Ribaucour, on reconnaît que la sphère n'y intervient que d'une manière accessoire et, en quelque sorte, comme élément de construction. Rien ne serait changé aux résultats si l'on substituait à l'équation (22) la suivante

$$\varphi(X, Y, Z) - 2xX - 2yY - 2zZ + \theta = 0,$$

où $\varphi(X, Y, Z)$ désigne une fonction absolument quelconque de X, Y, Z, θ étant d'ailleurs une fonction donnée d'une manière arbitraire des paramètres qui fixent la position du point (x, y, z) sur la surface. Cette remarque permet de former un grand nombre

de théorèmes analogues à celui de M. Ribaucour. Nous signalerons seulement le suivant :

U, V, W, P désignant des coordonnées tangentielles, écrivons l'équation

$$(24)\qquad Ux + Vy + Wz + P - R\sqrt{U^2+V^2+W^2} = 0,$$

qui représente une sphère ayant son centre sur la surface (Σ). Soient maintenant ρ, ρ_1 les paramètres du système conjugué, tracé sur cette surface, qui correspond à la fonction R (n° 107) et non plus à la fonction $x^2+y^2+z^2-R^2$. Alors x, y, z, R seront quatre solutions particulières d'une équation de la forme

$$(25)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\rho\,\partial\rho_1} + \alpha\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + \beta\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} = 0,$$

et, si l'on remplace θ par θR, on reconnaîtra que $\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}, \frac{1}{R}$ satisfont encore à une équation toute semblable, de sorte que l'on pourra appliquer le théorème général à l'équation (24) divisée par R. Les deux équations

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} &U\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{x}{R}\right) + V\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{y}{R}\right) + W\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{z}{R}\right) + P\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{R}\right) = 0,\\ &U\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{x}{R}\right) + V\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{y}{R}\right) + W\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{z}{R}\right) + P\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{1}{R}\right) = 0,\end{aligned}\right.$$

auxquelles on est conduit, définissent une droite qui est l'intersection des plans tangents à la sphère aux deux points où elle touche son enveloppe. Elle se trouve dans le plan tangent à (Σ) et elle est la polaire de la corde de contact par rapport à la sphère. D'après la proposition générale, interprétée en coordonnées tangentielles, les deux points focaux de cette droite sont déterminés par chacune des équations précédentes, considérée seule. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Étant donnée une sphère variable dont le centre décrit une surface (Σ), *les deux plans tangents à cette sphère aux points où elle touche son enveloppe se coupent suivant une droite située dans le plan tangent correspondant de* (Σ). *Les développables de la congruence engendrée par cette droite correspondent à deux familles de courbes conjuguées tracées sur* (Σ);

et les tangentes à ces courbes en un point de (Σ) *vont couper la droite correspondante de la congruence en ses deux points focaux.*

475. Ainsi, à chaque enveloppe de sphères on peut faire correspondre deux systèmes conjugués tracés sur la surface (Σ). Lorsqu'on se déplace sur une courbe appartenant au premier système, les quatre points de contact de deux sphères consécutives avec l'enveloppe sont dans un même plan; si l'on se déplace au contraire sur une courbe du second système, les quatre plans de contact de deux sphères consécutives vont concourir en un même point. Ces deux systèmes conjugués sont, en général, distincts; mais ils peuvent devenir identiques. Pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment, lorsque les points de la surface sont définis par deux variables quelconques α et β, que l'équation linéaire de la forme (8) dont les coefficients sont déterminés par la condition qu'elle admette les solutions particulières 1, x, y, z, R, admette aussi la solution particulière

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2.$$

Nous reviendrons sur cette condition; lorsqu'elle sera remplie, on pourra ramener l'équation linéaire à la forme normale

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho\, \partial \rho_1} + a \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + b \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} = 0. \tag{27}$$

ρ et ρ_1 seront les paramètres du système conjugué tracé sur (Σ) et l'équation précédente devra admettre les cinq solutions

$$x,\ y,\ z,\ R,\ x^2 + y^2 + z^2 - R^2.$$

Si l'on y substitue $x^2 + y^2 + z^2 - R^2$, en tenant compte de ce fait que x, y, z, R sont déjà des solutions particulières, on trouvera la relation

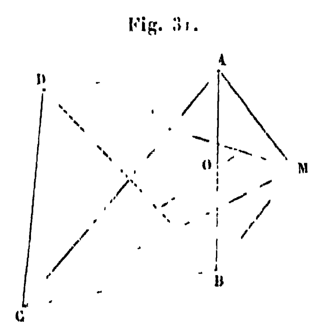
$$\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \rho_1} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R}{\partial \rho}\frac{\partial R}{\partial \rho_1} = 0, \tag{28}$$

que nous allons interpréter géométriquement.

Soient (*fig.* 31) M le centre de l'une des sphères, A et B les

points de contact de cette sphère avec l'enveloppe, C et D les points focaux de la droite CD d'intersection des plans tangents en A et en B. Nous allons montrer que les plans focaux de la droite AB passent respectivement par C et par D.

Fig. 31.



Nous avons vu que les plans focaux de AB sont représentés par les deux équations (23). Considérons celui qui est représenté par l'équation suivante :

$$(X-x)\frac{\partial x}{\partial \rho}+(Y-y)\frac{\partial y}{\partial \rho}+(Z-z)\frac{\partial z}{\partial \rho}+R\frac{\partial R}{\partial \rho}=0.$$

Les points focaux de CD sont représentés de même en coordonnées tangentielles par les équations (26); celui qui est défini par la seconde aura pour coordonnées

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\dfrac{x}{R}\right)}{\dfrac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\dfrac{1}{R}\right)},\qquad \frac{\dfrac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\dfrac{y}{R}\right)}{\dfrac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\dfrac{1}{R}\right)},\qquad \frac{\dfrac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\dfrac{z}{R}\right)}{\dfrac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\dfrac{1}{R}\right)}$$

ou, en réduisant,

$$x-\frac{R}{\dfrac{\partial R}{\partial \rho_1}}\frac{\partial x}{\partial \rho_1},\quad y-\frac{R}{\dfrac{\partial R}{\partial \rho_1}}\frac{\partial y}{\partial \rho_1},\quad z-\frac{R}{\dfrac{\partial R}{\partial \rho_1}}\frac{\partial z}{\partial \rho_1}.$$

Si l'on exprime que ce point est dans le plan focal précédent, on retrouve précisément l'équation (28).

Il est donc établi que les plans focaux de AB passent par les points C et D; et, comme ils sont respectivement perpendiculaires aux deux tangentes conjuguées MC, MD, le point O où AB coupe

le plan tangent en M sera le point de concours des hauteurs du triangle MCD. De plus, d'après un théorème de Géométrie élémentaire, les deux angles CAM, DAM étant droits, il en sera de même de l'angle CAD.

Les développables de AB correspondent à celles de CD, puisque les unes et les autres correspondent aux courbes du système conjugué tracé sur (Σ); et, de plus, les plans focaux de AB contiennent les points focaux de CD. Donc (n° 424) les tangentes AC et AD seront conjuguées par rapport à la nappe décrite par le point A; et, comme elles sont rectangulaires, elles seront tangentes en A aux lignes de courbure. Comme on peut répéter le raisonnement pour la nappe décrite par le point B, on voit que les développables de la congruence formée par la droite AB intercepteront sur les deux nappes de l'enveloppe leurs lignes de courbure. Si l'on considère les droites MA comme des rayons incidents qui se réfléchissent sur la surface des centres (Σ) suivant les rayons MB, on retrouve les systèmes étudiés par Dupin (n° 459), dans lesquels les développables formées par les rayons incidents se conservent après la réflexion. Ces développables découpent sur la surface des centres le système conjugué que nous avons considéré au n° 453.

Réciproquement, supposons que les lignes de courbure de la nappe décrite par le point A correspondent à celles de la nappe normale aux rayons réfléchis. D'après la démonstration du n° 451, les tangentes en A et en B aux lignes de courbure se couperont en des points C et D situés nécessairement dans le plan tangent en M, et les plans focaux de la droite AB seront les plans ACB, ADB.

Donc (n° 423) C et D seront les points focaux de la droite CD. Les deux systèmes conjugués tracés sur (Σ) deviendront identiques, puisque les deux paires de tangentes conjuguées relatives à ces deux systèmes se confondent en une seule, formée des droites MC, MD.

476. Les relations géométriques se présentent maintenant en grand nombre. On voit que, lorsque le point A décrit une ligne de courbure de la nappe correspondante, toutes les droites AM, AC, AD, BC, BD, CD, AB, BM, CM, DM décrivent en même temps des développables. Il y a trois paires de tangentes con-

juguées : MC et MD pour la surface décrite par le point M; AC, AD et BC, BD pour les surfaces décrites par les points A et B.

Décrivons des points C et D comme centres deux sphères (S_1) et (S_2) passant par A et par B, qui seront nécessairement tangentes en ces points aux lignes de courbure des deux nappes. Ces sphères, qui sont orthogonales, se couperont suivant un cercle (K); ce cercle a pour axe la droite CD et coupe à angle droit en A et en B la sphère de centre M. Supposons maintenant que le point M se déplace de telle manière que le point A, par exemple, décrive la ligne de courbure dont la tangente est AD. La sphère (S_1) de centre C enveloppera une surface à lignes de courbure circulaires et la touchera suivant le cercle (K). En effet, la sphère, étant constamment tangente à la courbe décrite par A, sera coupée par la sphère infiniment voisine suivant un cercle passant en A; et, d'autre part, la courbe décrite par le point C ayant CD pour tangente, ce cercle aura pour axe la droite CD. Il coïncidera donc avec le cercle (K).

Si l'on fait maintenant décrire au point A l'autre ligne de courbure de la nappe (A), la sphère de centre D enveloppera une surface à lignes de courbure circulaires, qu'elle touchera aussi suivant le cercle (K).

Nous obtenons ainsi deux familles distinctes de surfaces à lignes de courbure circulaires se coupant mutuellement à angle droit suivant leurs lignes de courbure circulaires, qui sont les différentes positions du cercle (K). D'après le théorème du n° 441, ces deux familles de surfaces sont orthogonales à une troisième famille. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Toutes les fois qu'une sphère variable dépendante de deux paramètres enveloppera une surface sur les deux nappes de laquelle les lignes de courbure se correspondent, le cercle (K) *qui est normal à la sphère variable et la coupe en ses deux points de contact coupe à angle droit toute une famille de surfaces. A cette première famille on peut associer deux autres familles orthogonales formées des surfaces à lignes de courbure circulaires obtenues en associant les positions successives du cercle* (K) *qui se coupent consécutivement.*

477. La découverte de ces systèmes triples orthogonaux est due à M. Ribaucour ([1]). Ils constituent une belle généralisation de celui qui est formé par une famille de surfaces parallèles et les développables trajectoires orthogonales. M. Ribaucour y a été conduit par le théorème suivant :

Lorsque les cercles d'une congruence sont normaux à plus de deux surfaces, ils sont normaux à une infinité de surfaces sur lesquelles les lignes de courbure se correspondent et qui constituent, par suite, une des trois familles d'un système orthogonal.

Pour établir cette proposition, nous envisagerons d'abord les cercles normaux à deux surfaces quelconques (A) et (B). On démontre aisément que ces cercles forment une congruence. Pour les obtenir tous, il suffit de construire une des sphères (S) tangentes à (A) et à (B) : le cercle qui passe par les points de contact de cette sphère avec (A) et (B) en coupant la sphère à angle droit est l'un des cercles cherchés. La surface (Σ) qui contient les centres des sphères (S) a été considérée par Gergonne; elle est le lieu des points d'où l'on peut mener aux deux surfaces (A) et (B) des normales de longueur égale. Si des rayons lumineux normaux à (A) et partant de (A) se réfléchissent sur la surface (Σ), ils deviendront après la réflexion normaux à (B), et le chemin total parcouru par la lumière sera le même que s'ils étaient partis des différents points de (B).

Cela posé, soit

$$\sum_{1}^{5} u_i x_i = 0 \tag{29}$$

l'équation en coordonnées pentasphériques de l'une des sphères (S). Les quantités u_i dépendent de deux paramètres variables α et β, et l'on obtiendra les points de contact de la sphère avec les

---

([1]) A. Ribaucour, *Sur la déformation des surfaces* (*Comptes rendus*, t. LXX, p. 330; 1870). *Sur les systèmes cycliques* (Même Recueil, t. LXXVI, p. 478; 1873). *Sur les faisceaux de cercles* (Même Recueil et même tome, p. 830).

deux nappes (A) et (B) de l'enveloppe en joignant à l'équation précédente ses deux dérivées par rapport à α et à β

$$\sum \frac{\partial u_i}{\partial \alpha} x_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial u_i}{\partial \beta} x_i = 0. \tag{30}$$

Ces deux équations représentent un cercle qui passe par les points de contact de la sphère. Mais, si l'on a multiplié les quantités u_i par une fonction telle que l'on ait

$$\sum u_i^2 = 1, \tag{31}$$

les deux sphères représentées par l'équation (30) couperont à angle droit la sphère (S) en vertu des relations

$$\sum u_i \frac{\partial u_i}{\partial \alpha} = 0, \qquad \sum u_i \frac{\partial u_i}{\partial \beta} = 0,$$

qui dérivent de l'équation (31) (n° 156). Par suite, *les deux équations* (30) *représenteront tous les cercles* (K) *normaux aux deux surfaces* (A) *et* (B).

Supposons maintenant que ces cercles soient normaux à une troisième surface (C). En raisonnant sur les deux surfaces (A) et (C) comme nous l'avons fait avec (A) et (B), on sera conduit à des équations nouvelles pour les cercles (K). Si l'équation

$$\sum v_i x_i = 0 \tag{32}$$

représente les sphères tangentes à (A) et à (C), et si l'on a choisi les fonctions v_i, de telle manière que l'on ait

$$\sum v_i^2 = 1,$$

le cercle (K) sera encore défini par les équations

$$\sum \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} x_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial v_i}{\partial \beta} x_i = 0,$$

qui devront être équivalentes aux précédentes (30). Il faudra

donc que l'on ait

$$(33)\qquad \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} = m\frac{\partial u_i}{\partial \alpha} + n\frac{\partial u_i}{\partial \beta}, \qquad \frac{\partial v_i}{\partial \beta} = m_0\frac{\partial u_i}{\partial \alpha} + n_0\frac{\partial u_i}{\partial \beta},$$

pour toutes les valeurs de l'indice i. En éliminant v_i, on sera conduit à une équation aux dérivées partielles de la forme suivante

$$(34)\qquad A\frac{\partial^2 u_i}{\partial \alpha^2} + B\frac{\partial^2 u_i}{\partial \alpha\,\partial \beta} + C\frac{\partial^2 u_i}{\partial \beta^2} + D\frac{\partial u_i}{\partial \alpha} + E\frac{\partial u_i}{\partial \beta} = 0,$$

qui devra être vérifiée par les cinq quantités u_i.

Nous avons au Livre II [I, p. 227] introduit la notation des *six* coordonnées de la sphère. Il suffit de joindre aux *cinq* quantités u_i qui figurent dans l'équation de la sphère la sixième u_6 qui est définie par la relation identique

$$(35)\qquad \sum_1^5 u_k^2 = -u_6^2.$$

Ici cette sixième coordonnée sera égale à $\pm i$, d'après la relation (21) et, par suite, elle sera aussi une solution de l'équation (34). Nous pouvons donc interpréter comme il suit la condition trouvée. *Les six coordonnées de la sphère* (S) *doivent satisfaire à une même équation aux dérivées partielles du second ordre.* Cette propriété a lieu, en effet, lorsque la sixième coordonnée est réduite à une constante, et elle subsiste évidemment quand on multiplie toutes les coordonnées par une fonction quelconque de α et de β.

Il est aisé maintenant de reconnaître que la condition précédente, qui est nécessaire, est aussi suffisante. En effet, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées cartésiennes du centre de (S) et par R son rayon, on déduira facilement des développements donnés au Chapitre VI [I, p. 213] que les six coordonnées de la sphère sont des fonctions linéaires de

$$\lambda,\quad \lambda x,\quad \lambda y,\quad \lambda z,\quad \lambda R,\quad \lambda(x^2+y^2+z^2-R^2),$$

λ étant un facteur de proportionnalité. Si on le réduit à l'unité, on reconnaît que

$$1,\quad x,\quad y,\quad z,\quad R,\quad x^2+y^2+z^2-R^2$$

doivent satisfaire à une même équation linéaire aux dérivées partielles. On retrouve ainsi la condition qui nous a servi de point de départ; et, par suite, le théorème de M. Ribaucour est complètement établi.

On démontrerait de même que, *si des cercles sont normaux à deux surfaces et si chacun d'eux est rencontré en deux points par un des cercles infiniment voisins, tous ces cercles sont normaux à une famille de surfaces.*

478. Les systèmes que nous venons d'étudier et auxquels M. Ribaucour a donné le nom de *systèmes cycliques* jouent le rôle le plus important dans la théorie des surfaces à courbure constante. Pour le moment, nous allons rechercher comment on peut effectivement obtenir de tels systèmes, c'est-à-dire, d'après les propositions précédentes, des enveloppes de sphères pour lesquelles les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes.

Nous nous donnerons d'abord la surface (Σ) décrite par les centres des sphères, et nous chercherons à déterminer le rayon R des sphères de manière à satisfaire à la condition énoncée. Cela revient à déterminer les rayons incidents qui se réfléchissent sur (Σ) et dont les développables sont conservées par la réflexion.

Soient α et β les paramètres d'ailleurs quelconques qui fixent la position du point (x, y, z) sur (Σ). Il faudra exprimer qu'il existe une équation de la forme (34) admettant les cinq solutions

$$x,\quad y,\quad z,\quad R,\quad x^2+y^2+z^2-R^2.$$

Désignons par la notation

$$D_{\alpha\beta}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \tag{36}$$

le déterminant formé avec six fonctions, leurs dérivées premières et leurs dérivées secondes; on voit que R devra satisfaire à l'équation du second ordre

$$D_{\alpha\beta}(x, y, z, 1, R, x^2+y^2+z^2-R^2) = 0. \tag{37}$$

En posant, pour abréger,

$$dx^2+dy^2+dz^2 = E\,d\alpha^2+2F\,d\alpha\,d\beta+G\,d\beta^2, \tag{38}$$

on ramènera aisément l'équation précédente à la forme

$$\begin{vmatrix} E - \left(\frac{\partial R}{\partial \alpha}\right)^2 & F - \frac{\partial R}{\partial \alpha}\frac{\partial R}{\partial \beta} & G - \left(\frac{\partial R}{\partial \beta}\right)^2 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\,\partial \beta} & \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on suppose, par exemple, que α et β soient les coordonnées rectangulaires x et y, on trouvera, après quelques réductions,

$$(39)\quad \left\{ \begin{aligned} &(1 + p^2 - p'^2)(st' - ts') \\ &\quad - (pq - p'q')(rt' - tr') + (1 + q^2 - q'^2)(rs' - sr') = 0, \end{aligned} \right.$$

les lettres p, q, r, s, t désignant les dérivées de z et les lettres accentuées celles de R.

Cette équation du second ordre est celle que nous avons intégrée dans le Chapitre précédent lorsque la surface (Σ) est du second degré. On en connaît toujours des solutions particulières, qui correspondent au cas où la sphère mobile ayant son centre sur (Σ) couperait sous un angle constant une sphère fixe. Dans ce cas, en effet, les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de l'enveloppe (n° 172); et, du reste, le déterminant (37) est évidemment nul, puisqu'il y a une relation linéaire entre les six fonctions avec lesquelles il est formé.

479. Prenons, par exemple,

$$R = nz.$$

Alors, si l'on considère des rayons incidents parallèles à l'axe des z et qui se réfractent en rencontrant la surface (Σ), l'anticaustique normale aux rayons réfractés sera (n° 450) l'enveloppe de toutes les sphères dont les rayons sont définis, en chaque point de la surface, par la formule précédente, pourvu que la constante n soit égale à l'indice de réfraction. Cette enveloppe se composera de deux nappes qui correspondront à des valeurs égales et de signes

contraires de l'indice de réfraction. Comme la valeur précédente de R satisfait à l'équation (39), les lignes de courbure se correspondront sur les deux nappes de l'enveloppe, et elles correspondront à un système conjugué tracé sur la surface (Σ).

Soient ρ et ρ_1 les paramètres des deux familles qui composent ce système conjugué. Nous avons vu plus haut que l'on aura

$$(40) \qquad \frac{\partial x}{\partial\rho}\frac{\partial x}{\partial\rho_1}+\frac{\partial y}{\partial\rho}\frac{\partial y}{\partial\rho_1}+\frac{\partial z}{\partial\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho_1}-\frac{\partial R}{\partial\rho}\frac{\partial R}{\partial\rho_1}=0.$$

Si l'on remplace R par nz, il viendra

$$\frac{\partial x}{\partial\rho}\frac{\partial x}{\partial\rho_1}+\frac{\partial y}{\partial\rho}\frac{\partial y}{\partial\rho_1}+(1-n^2)\frac{\partial z}{\partial\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho_1}=0.$$

Construisons la surface (Σ') obtenue en diminuant les coordonnées z de tous les points de (Σ) dans le rapport de $\sqrt{1-n^2}$ à 1, c'est-à-dire la surface lieu du point

$$x'=x, \qquad y'=y, \qquad z'=z\sqrt{1-n^2}.$$

Le système (ρ, ρ_1) sera encore conjugué sur cette surface. De plus l'équation (40) prendra la forme

$$\frac{\partial x'}{\partial\rho}\frac{\partial x'}{\partial\rho_1}+\frac{\partial y'}{\partial\rho}\frac{\partial y'}{\partial\rho_1}+\frac{\partial z'}{\partial\rho}\frac{\partial z'}{\partial\rho_1}=0,$$

et, par conséquent, le système conjugué, étant orthogonal, sera formé des lignes de courbure de (Σ'). Ainsi :

Les lignes de courbure des anticaustiques par réfraction relatives à un système de rayons incidents, normaux à un plan (P), *qui se réfractent sur une surface* (Σ), *correspondent aux lignes de courbure de la surface* (Σ') *obtenue en diminuant les ordonnées normales à* (P) *des différents points de* (Σ) *dans le rapport de* $\sqrt{1-n^2}$ *à* 1.

Cette proposition, qui est équivalente à celle que nous avons donnée [I, p. 262], fera connaître les lignes de courbure des anticaustiques dans un grand nombre de cas et, en particulier, lorsque la surface (Σ) sera du second degré.

480. Nous donnerons ici une règle commode pour déterminer,

dans le cas le plus général, les équations tangentielles de ces anticaustiques.

Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point de la surface dirimante (Σ). Soit

$$(41) \qquad ax + by + cz + \delta = 0$$

l'équation du plan normal aux rayons incidents. De chaque point de (Σ) comme centre, avec le rayon

$$R = n\frac{ax + by + cz + \delta}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

il faut décrire une sphère dont l'enveloppe donnera l'anticaustique (A'). On peut toujours supposer, pour simplifier, que l'équation du plan a été multipliée par une constante convenable, et que l'on a

$$(42) \qquad n = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

ce qui donne pour le rayon R la valeur

$$(43) \qquad R = ax + by + cz + \delta.$$

L'équation tangentielle d'une sphère de centre (x, y, z) et de rayon R est

$$ux + vy + wz + p + R\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = 0.$$

Remplaçons R par sa valeur et supposons

$$(44) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = 1;$$

nous aurons à prendre l'enveloppe des sphères représentées par l'équation

$$(45) \qquad (u + a)x + (v + b)y + (w + c)z + p + \delta = 0,$$

quand le point (x, y, z) décrit la surface (Σ). Le résultat est évident; nous trouverons l'équation tangentielle de la surface dans laquelle on aurait remplacé u, v, w, p par $u + a, v + b, w + c, p + \delta$. Ainsi :

Pour obtenir l'équation de l'anticaustique relative aux rayons incidents qui sont normaux au plan représenté par

l'équation (41), *on cherchera l'équation tangentielle homogène*

$$f(u, v, w, p) = 0$$

de la surface dirimante. Celle de l'anticaustique sera alors

$$f(u + a, v + b, w + c, p + \delta) = 0,$$

u, v, w étant supposés maintenant reliés par l'équation

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1.$$

Considérons, par exemple, une surface à centre du second degré, rapportée à ses axes de symétrie. Son équation sera

$$p^2 = A u^2 + B v^2 + C w^2, \tag{46}$$

et, par conséquent, celle de l'anticaustique (A) deviendra

$$(p + \delta)^2 = A(u + a)^2 + B(v + b)^2 + C(w + c)^2. \tag{47}$$

Cette équation développée est de la forme

$$(p + \delta)^2 = \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 + 2\alpha' u + 2\beta' v + 2\gamma' w, \tag{48}$$

déjà considérée au n° 457. Elle représente, avec des axes convenablement choisis, la surface la plus générale définie par la condition d'*être corrélative d'une surface du quatrième ordre à conique double et d'admettre elle-même comme conique double le cercle de l'infini.*

Réciproquement, il est possible de démontrer qu'une surface de cette définition peut être considérée comme une anticaustique relativement à quatre surfaces différentes du second degré. Si l'on identifie, en effet, les équations (47) et (48), on sera conduit à la relation

$$\begin{aligned}(\alpha - A) u^2 + (\beta - B) v^2 + (\gamma - C) w^2 \\ + 2(\alpha' - A a) u + 2(\beta' - B b) v + 2(\gamma' - C c) w - A a^2 - B b^2 - C c^2 = 0.\end{aligned}$$

Elle ne peut avoir lieu que si l'on a

$$\begin{gathered}\alpha' = A a, \qquad \beta' = B b, \qquad \gamma' = C c, \\ \alpha - A = \lambda, \qquad \beta - B = \lambda, \qquad \gamma - C = \lambda, \\ \lambda = A a^2 + B b^2 + C c^2.\end{gathered}$$

On obtient ainsi

$$A = \alpha - \lambda, \qquad B = \beta - \lambda, \qquad C = \gamma - \lambda;$$
$$a = \frac{\alpha'}{\alpha - \lambda}, \qquad b = \frac{\beta'}{\beta - \lambda}, \qquad c = \frac{\gamma'}{\gamma - \lambda},$$
$$f(\lambda) = \lambda - \frac{\alpha'^2}{\alpha - \lambda} - \frac{\beta'^2}{\beta - \lambda} - \frac{\gamma'^2}{\gamma - \lambda} = 0.$$

L'équation en λ fera connaître quatre valeurs différentes de cette inconnue, auxquelles correspondront quatre surfaces différentes du second degré. Ces surfaces seront homofocales; l'indice relatif à chaque réfraction aura pour valeur

$$(49) \qquad n = \sqrt{1 - f'(\lambda)};$$

et, par suite, la réfraction ne se changera en une réflexion que dans le cas exceptionnel où l'équation en λ aura une racine double [1].

481. Dans les applications précédentes, nous avons considéré comme donnée la surface des centres (Σ), et nous avons cherché le rayon R, c'est-à-dire nous avons déterminé les rayons incidents. Donnons-nous maintenant les rayons incidents, qui seront normaux à une surface (A), et proposons-nous de déterminer les surfaces (Σ) sur lesquelles on peut faire réfléchir ces rayons de telle manière que les développables soient conservées par la réflexion. D'après le théorème de Dupin, ce problème peut s'énoncer ainsi :

Étant donnée la surface (A), *déterminer toutes les surfaces* (Σ) *sur lesquelles les développables formées par les normales de* (A) *découpent un réseau conjugué.*

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de (A), c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale en ce point. Rapportons la surface au système de coordonnées (ρ, ρ_1) formé par les lignes de

[1] Consulter sur ce sujet :
LAGUERRE, *Sur la transformation par directions réciproques* (*Comptes rendus*, t. XCII, p. 71; 1881).
DARBOUX, *Détermination des lignes de courbure de toutes les surfaces de quatrième classe, corrélatives des cyclides, qui admettent le cercle de l'infini comme ligne double* (même Recueil et même tome, p. 29).

courbure. Nous aurons les équations d'Olinde Rodrigues

$$(50)\quad \frac{\partial x}{\partial \rho} + R\frac{\partial c}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial \rho} + R\frac{\partial c'}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial \rho} + R\frac{\partial c''}{\partial \rho} = 0,$$

$$(51)\quad \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + R_1\frac{\partial c}{\partial \rho_1} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial \rho_1} + R_1\frac{\partial c'}{\partial \rho_1} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial \rho_1} + R_1\frac{\partial c''}{\partial \rho_1} = 0,$$

où R et R_1 désignent les deux rayons de courbure principaux. Si l'on pose

$$(52)\qquad X = x + cR, \qquad Y = y + c'R, \qquad Z = z + c''R,$$

X, Y, Z seront les coordonnées de l'un des centres de courbure et devront être des solutions particulières d'une équation de la forme

$$(53)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho\, \partial \rho_1} + \alpha\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \beta\frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} = 0,$$

que l'on obtiendrait en éliminant x et c entre les trois premières équations des groupes (50), (51) et (52), mais qu'il est inutile de former; on reconnaît immédiatement que sa solution générale s'obtiendra en prenant les valeurs les plus générales de λ, μ satisfaisant aux deux équations

$$(54)\qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} + R\frac{\partial \mu}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \rho_1} + R_1\frac{\partial \mu}{\partial \rho_1} = 0,$$

et en les portant dans la suivante

$$(55)\qquad \theta = \lambda + \mu R.$$

Cette remarque nous donne la solution de la question proposée. Nous avons vu, en effet (n° 418), comment on détermine toutes les surfaces (Σ) qui sont coupées suivant des courbes conjuguées par les développables d'une congruence, lorsqu'on connaît une des surfaces focales de la congruence et le système conjugué tracé sur cette surface. Appliquons cette solution générale à la congruence formée par les normales de la surface (A). Les coordonnées homogènes du centre de courbure étant X, Y, Z, 1, on aura ici, en appliquant les formules (5) [p. 222],

$$X_0 = X\frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \theta\frac{\partial X}{\partial \rho}, \qquad Y_0 = Y\frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \theta\frac{\partial Y}{\partial \rho}, \qquad Z_0 = Z\frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \theta\frac{\partial Z}{\partial \rho},$$

$$T_0 = \frac{\partial \theta}{\partial \rho},$$

θ étant la solution la plus générale de l'équation (53) et X_0, Y_0, Z_0, T_0 désignant les coordonnées homogènes du point de la surface cherchée (Σ). Si l'on remplace X, Y, Z, θ par leurs valeurs déduites des formules (52) et (55), on trouve ainsi

$$(56) \qquad X_1 = x - c\frac{\lambda}{\mu}, \qquad Y_1 = y - c'\frac{\lambda}{\mu}, \qquad Z_1 = z - c''\frac{\lambda}{\mu},$$

X_1, Y_1, Z_1 désignant maintenant les coordonnées rectangulaires du point cherché et λ, μ les solutions les plus générales du système (54).

On voit que tout se ramène à l'intégration de ce système (54). On en connaît déjà des solutions particulières

$$\lambda = x, \quad \mu = c; \quad \lambda = y, \quad \mu = c'; \quad \lambda = z, \quad \mu = c'';$$
$$\lambda = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \mu = 2cx + 2c'y + 2c''z.$$

Par suite, si l'on élimine λ entre les deux équations (54), on sera conduit à l'équation aux dérivées partielles suivante

$$(57) \qquad \frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(R\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right) - \frac{\partial}{\partial\rho}\left(R_1\frac{\partial\mu}{\partial\rho_1}\right) = 0,$$

qui, devant admettre les solutions particulières c, c', c'', sera nécessairement l'*équation tangentielle* relative au système conjugué formé par les lignes de courbure de la surface (Λ).

Nous avons vu (n° 162) que l'intégration de cette équation équivaut à la détermination de toutes les surfaces ayant même représentation sphérique de leurs lignes de courbure que (Λ).

La sphère qui est normale au rayon incident et au rayon réfléchi a son centre au point (X_1, Y_1, Z_1) et elle touche la surface (Λ) au point (x, y, z). Son équation s'obtient donc sans difficulté; on peut lui donner la forme suivante :

$$(58) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mu}{2\lambda}[(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2] \\ \quad + c(X-x) + c'(Y-y) + c''(Z-z) = 0. \end{array} \right.$$

Pour déterminer les points où elle touche son enveloppe, on la différentiera successivement par rapport à ρ et à ρ_1, ce qui donnera,

en tenant compte du système (54), les deux équations

$$(59) \quad \begin{cases} \dfrac{\frac{\partial\mu}{\partial\rho}}{2\lambda}[(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2] \\ \qquad + \dfrac{\partial c}{\partial\rho}(X-x)+\dfrac{\partial c'}{\partial\rho}(Y-y)+\dfrac{\partial c''}{\partial\rho}(Z-z)=0, \\ \dfrac{\frac{\partial\mu}{\partial\rho_1}}{2\lambda}[(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2] \\ \qquad + \dfrac{\partial c}{\partial\rho_1}(X-x)+\dfrac{\partial c'}{\partial\rho_1}(Y-y)+\dfrac{\partial c''}{\partial\rho_1}(Z-z)=0, \end{cases}$$

qui représentent un cercle coupant la sphère aux deux points cherchés.

L'un de ces deux points est évidemment le pied de la normale

$$X=x, \qquad Y=y, \qquad Z=z.$$

Les plans tangents en ce point aux trois sphères représentées par les équations (58), (59) s'obtiennent immédiatement; ce sont le plan tangent et les deux plans principaux de la surface (A). Par suite, les trois sphères sont orthogonales et *le cercle représenté par les équations* (59) *est celui qui est normal aux deux nappes de l'enveloppe.*

482. Comme on peut toujours ajouter à μ une constante ρ_2 sans que le système (54) cesse d'être vérifié, on voit que les enveloppes des sphères représentées par l'équation

$$(60) \quad \begin{cases} \dfrac{\mu+\rho_2}{2\lambda}[(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2] \\ \qquad + c(X-x)+c'(Y-y)+c''(Z-z)=0 \end{cases}$$

admettront comme trajectoires orthogonales tous les cercles représentés par les équations (59). Nous obtenons ainsi le système triple orthogonal dont nous avions établi l'existence au n° 476; et les valeurs de ρ, ρ_1, ρ_2 tirées des formules (59) et (60) seront les paramètres des trois familles qui le composent.

Voici quelques formules relatives à ce système :

Introduisons la fonction auxiliaire θ définie par la relation

$$(61) \qquad X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=-2\lambda\theta.$$

Les formules (59) et (60) pourront être remplacées par le système suivant :

$$(62)\quad \begin{cases} c(X-x)+c'(Y-y)+c''(Z-z)=\theta(\mu+\rho_2), \\ \dfrac{\partial c}{\partial\rho}(X-x)+\dfrac{\partial c'}{\partial\rho}(Y-y)+\dfrac{\partial c''}{\partial\rho}(Z-z)=\theta\dfrac{\partial\mu}{\partial\rho}, \\ \dfrac{\partial c}{\partial\rho_1}(X-x)+\dfrac{\partial c'}{\partial\rho_1}(Y-y)+\dfrac{\partial c''}{\partial\rho_1}(Z-z)=\theta\dfrac{\partial\mu}{\partial\rho_1}. \end{cases}$$

Ces équations peuvent être résolues par rapport à X, Y, Z et nous donnent

$$(63)\quad \begin{cases} X-x=\theta(\mu+\rho_2)c+\dfrac{\theta}{e}\dfrac{\partial\mu}{\partial\rho}\dfrac{\partial c}{\partial\rho}+\dfrac{\theta}{g}\dfrac{\partial\mu}{\partial\rho_1}\dfrac{\partial c}{\partial\rho_1}, \\ Y-y=\theta(\mu+\rho_2)c'+\dfrac{\theta}{e}\dfrac{\partial\mu}{\partial\rho}\dfrac{\partial c'}{\partial\rho}+\dfrac{\theta}{g}\dfrac{\partial\mu}{\partial\rho_1}\dfrac{\partial c'}{\partial\rho_1}, \\ Z-z=\theta(\mu+\rho_2)c''+\dfrac{\theta}{e}\dfrac{\partial\mu}{\partial\rho}\dfrac{\partial c''}{\partial\rho}+\dfrac{\theta}{g}\dfrac{\partial\mu}{\partial\rho_1}\dfrac{\partial c''}{\partial\rho_1}, \end{cases}$$

e et g étant les quantités définies par l'identité

$$(64)\quad dc^2+dc'^2+dc''^2=e\,d\rho^2+g\,d\rho_1^2.$$

Si l'on porte les valeurs de X, Y, Z tirées des formules (63) dans l'équation (61), on aura la relation

$$(65)\quad \frac{2\lambda}{\theta}+(\mu+\rho_2)^2+\frac{1}{e}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2+\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho_1}\right)^2=0,$$

qui fera connaître θ.

Des différentiations nous donneront ensuite les dérivées de X, Y, Z par rapport à ρ, ρ_1, ρ_2. On trouve ainsi

$$(66)\quad \frac{\partial X}{\partial\rho}=\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\left[X-x+\lambda\frac{\dfrac{\partial c}{\partial\rho}}{\dfrac{\partial\mu}{\partial\rho}}\right],\qquad \frac{\partial X}{\partial\rho_1}=\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}\left[X-x+\lambda\frac{\dfrac{\partial c}{\partial\rho_1}}{\dfrac{\partial\mu}{\partial\rho_1}}\right]$$

$$(67)\quad \frac{\partial X}{\partial\rho_2}=\frac{\mu+\rho_2}{\lambda}\theta\left[X-x+\frac{c\lambda}{\mu+\rho_2}\right],$$

et des formules analogues pour les dérivées de Y et de Z. Ces valeurs permettent de vérifier aisément les relations d'orthogonalité. On en déduit, pour l'élément linéaire relatif au système

orthogonal, la formule

$$(68)\qquad ds^2 = \theta^2\, d\rho_2^2 + \left(\frac{\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho}}{\theta\dfrac{\partial\mu}{\partial\rho}}\right)^2 e\, d\rho^2 + \left(\frac{\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho_1}}{\theta\dfrac{\partial\mu}{\partial\rho_1}}\right)^2 g\, d\rho_1^2,$$

où il faudra remplacer θ par sa valeur tirée de l'équation (65).

Lorsqu'on donnera à ρ_2 différentes valeurs constantes, on aura les différentes surfaces qui sont les trajectoires orthogonales des cercles représentés par les équations (59). La surface (A) correspond à l'hypothèse $\rho_2 = \infty$. Il résulte d'ailleurs de la forme des expressions de X, Y, Z, θ par rapport à ρ_2 que quatre trajectoires orthogonales fixes couperont chaque cercle en quatre points dont le rapport anharmonique sera constant. M. Ribaucour a beaucoup insisté sur cette propriété et en a déduit différentes conséquences.

Si l'on prend pour les cosinus directeurs de la normale à une des surfaces les valeurs γ, γ', γ'' définies, en grandeur *et en signe*, par des formules telles que les suivantes

$$(69)\qquad \gamma = c + (X - x)\frac{\mu + \rho_2}{\lambda}, \qquad \ldots,$$

les rayons de courbure principaux R', R'_1 de la surface seront définis par les relations élégantes

$$(70)\qquad R'\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\theta(\mu+\rho_2)}{\lambda}\right] = 0, \qquad R'_1\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} + \frac{\partial}{\partial\rho_1}\left[\frac{\theta(\mu+\rho_2)}{\lambda}\right] = 0.$$

Si l'on se reporte à la *fig.* 31 en supposant que x, y, z soient les coordonnées du point A, on déterminera aisément tous les éléments de la figure. Les coordonnées de M et de B seront données par les formules (56) et (63); celles de C et de D par les suivantes

$$(71)\qquad \left\{\begin{aligned} X_C &= x - \lambda\frac{\dfrac{\partial c}{\partial\rho}}{\dfrac{\partial\mu}{\partial\rho}} = x - \lambda\frac{\dfrac{\partial x}{\partial\rho}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial\rho}},\\ X_D &= x - \lambda\frac{\dfrac{\partial c}{\partial\rho_1}}{\dfrac{\partial\mu}{\partial\rho_1}} = x - \lambda\frac{\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial\rho_1}},\end{aligned}\right.$$

auxquelles on ajoutera les valeurs analogues pour Y et Z.

La détermination des systèmes orthogonaux précédents repose sur l'intégration du système (54). Si l'on prenait pour λ et μ les combinaisons linéaires suivantes

$$\lambda = hx + ky + lz + m + n(x^2 + y^2 + z^2),$$
$$\mu = hc + kc' + lc'' + \rho_2 + 2n(cx + c'y + c''z)$$

des solutions signalées plus haut, on retrouverait le cas particulier déjà étudié [I, p. 258 et suiv.], dans lequel les cercles de la congruence sont normaux deux fois à une sphère ou à un plan. La détermination complète des systèmes orthogonaux correspondants exige seulement l'intégration de l'équation différentielle des lignes de courbure sur la surface proposée.

483. La proposition fondamentale, d'après laquelle les *six* coordonnées de la sphère qui enveloppe une surface sur les deux nappes de laquelle les lignes de courbure se correspondent satisfont à une même équation linéaire du second ordre, peut recevoir un grand nombre d'applications. Nous verrons, par exemple, que, lorsque les six coordonnées satisfont à l'équation élémentaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \, \partial \beta} = 0,$$

la sphère enveloppe la surface la plus générale ayant ses lignes de courbure sphériques dans les deux systèmes; de sorte que la détermination de toute surface à lignes de courbure sphériques dans les deux systèmes se ramène à celle de six fonctions A_i de α et de six fonctions B_i de β vérifiant l'identité

$$\sum_1^6 (A_i - B_i)^2 = 0.$$

On obtiendra de même toutes les surfaces à lignes de courbure sphériques dans un seul système en déterminant toutes les sphères dont les six coordonnées satisfont à une équation linéaire dont un des invariants est égal à zéro. Nous nous contenterons maintenant de ces indications; et nous terminerons ce Chapitre, ainsi que le Livre destiné aux congruences, en remarquant que l'on peut étendre la proposition précédente aux congruences rectilignes.

Soient (G) une congruence de droites, (Σ) et (Σ_1) les deux nappes de sa surface focale; chaque droite de la congruence, touchant en un point la nappe (Σ) et en un point la nappe (Σ_1), établit ainsi une correspondance point par point entre ces deux nappes. Les lignes asymptotiques de (Σ) ne correspondent pas, en général, à celles de (Σ_1). Mais, si l'on emploie la transformation de M. Lie en l'appliquant à la proposition que nous avons étudiée relativement aux enveloppes de sphères, on est immédiatement conduit au résultat suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes (Σ), (Σ_1) *est que les six coordonnées de chaque droite de la congruence, qui sont fonctions de deux paramètres variables, vérifient une même équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre.*

Appliquons cette proposition aux congruences de normales; x, y, z désignant les coordonnées du pied de la normale, les six coordonnées de la normale sont

$$-x-pz,\quad y+qz,\quad py-qx,\quad -q,\quad -p,\quad 1,$$

p et q désignant les dérivées de z. Prenons, par exemple, x et y comme variables indépendantes; la condition pour que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface des centres est

$$D_{xy}(x+pz,\ y+qz,\ py-qx,\ p,\ q,\ 1)=0.$$

Cette équation aux dérivées partielles du troisième ordre est celle des surfaces *pour lesquelles les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre.*

LIVRE V.

DES LIGNES TRACÉES SUR LES SURFACES.

CHAPITRE I.

FORMULES GÉNÉRALES.

Définition d'un trièdre trirectangle (T) lié à chaque élément de la surface. — Application des formules données dans le Livre I relativement aux déplacements qui dépendent de deux paramètres. — Systèmes de formules (A) et (B). — Directions conjuguées. — Lignes asymptotiques. — Lignes de courbure; équation aux rayons de courbure principaux. — Propriété cinématique des lignes de courbure. — Formules relatives à une courbe quelconque tracée sur la surface. — Théorème de Meusnier. — Courbure normale; courbure géodésique. — Éléments du troisième ordre. — Formules de MM. O. Bonnet et Laguerre. — Sphère osculatrice.

484. Nous nous proposons maintenant de reprendre l'étude des surfaces en la rattachant directement aux développements donnés dans le Livre I. Nous ferons connaître d'abord différents systèmes de formules parmi lesquelles se trouvent celles que l'on doit à M. Codazzi.

Considérons une surface quelconque; on peut lier l'étude de cette surface à celle du mouvement d'un système mobile en opérant de la manière suivante.

M désignant un point de la surface, construisons un trièdre trirectangle (T) dont le sommet soit en M et dont l'axe des z soit la normale en M; les axes des x et des y seront, par suite, situés dans le plan tangent à la surface. Ces axes seront parfaitement déterminés si l'on connaît, pour chaque position du point M, l'angle de l'axe des x avec l'une des lignes coordonnées, par exemple avec la tangente à la courbe $v = \text{const.}$ Sans indiquer, pour le moment, rien de plus précis relativement à leur position

dans le plan tangent, nous allons montrer comment les propriétés de la surface et des courbes qui y sont tracées se déduisent de l'étude du mouvement du trièdre (T).

Remarquons d'abord que, si l'on conserve toutes les notations du Chapitre VII [I, p. 66], ce mouvement est caractérisé par les équations

$$\zeta = 0, \qquad \zeta_1 = 0,$$

qui expriment que la surface décrite par le sommet du trièdre est tangente au plan des xy.

Alors les formules du Livre I [I, p. 49 et 66] nous donnent le système suivant :

$$(\mathrm{A})\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1, &\quad &\frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta r_1 - r \eta_1,\\ &\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - p r_1, &\quad &\frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = r \xi_1 - \xi r_1,\\ &\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1, &\quad &p \eta_1 - \eta p_1 + \xi q_1 - q \xi_1 = 0, \end{aligned} \right.$$

et il résulte évidemment des propositions établies au Livre I qu'*à tout système de valeurs des quantités* $p, \ldots, \xi, \ldots,$ *satisfaisant à ces équations, correspondra un mouvement parfaitement déterminé, et par conséquent une seule surface.*

Si un point rapporté au trièdre (T) a pour coordonnées x, y, z, on aura, en appliquant les formules (4) [I, p. 67],

$$(\mathrm{B})\quad \left\{ \begin{aligned} &dx + \xi\, du + \xi_1\, dv + (q\, du + q_1\, dv) z - (r\, du + r_1\, dv) y,\\ &dy + \eta\, du + \eta_1\, dv + (r\, du + r_1\, dv) x - (p\, du + p_1\, dv) z,\\ &dz \qquad\qquad\qquad + (p\, du + p_1\, dv) y - (q\, du + q_1\, dv) x, \end{aligned} \right.$$

pour les projections de son déplacement sur les axes du trièdre mobile, quand u et v prendront des accroissements du, dv.

485. Considérons, en particulier, la surface proposée, qui est parcourue par l'origine du trièdre mobile ; ds désignant la différentielle de l'arc de courbe décrit par cette origine et ω l'angle que fait la tangente à cette courbe avec l'axe des x du trièdre mobile, on aura

$$(1)\qquad ds \cos\omega = \xi\, du + \xi_1\, dv, \qquad ds \sin\omega = \eta\, du + \eta_1\, dv.$$

Ces formules feront connaître l'élément linéaire de la surface, qui aura pour expression

$$(2)\qquad ds^2 = (\xi\, du + \xi_1\, dv)^2 + (\eta\, du + \eta_1\, dv)^2.$$

Imaginons que, par un point fixe O de l'espace, on mène des droites parallèles aux axes du trièdre (T). On formera ainsi un trièdre (T_1) dont les rotations seront les mêmes que celles du trièdre (T). Si l'on considère le point m à la distance 1 sur l'axe des z de ce trièdre, il décrira une sphère (S) de rayon 1; ce sera évidemment le point qui correspond à M lorsqu'on effectue la représentation sphérique de la surface proposée sur la sphère (S) d'après la règle que nous avons indiquée.

D'ailleurs, si nous appliquons les formules (4) [I, p. 48] relatives au déplacement d'un trièdre ayant un point fixe, nous trouverons pour les projections du déplacement du point m sur les axes du trièdre (T_1) ou, ce qui est la même chose, sur ceux du trièdre (T), les valeurs suivantes :

$$q\, du + q_1\, dv, \qquad -p\, du - p_1\, dv, \qquad 0.$$

Par suite, si nous désignons par $d\sigma$ l'arc de courbe décrit par le point m et par θ l'angle que fait cet arc avec l'axe des x du trièdre (T), on aura

$$(3)\qquad d\sigma \cos\theta = q\, du + q_1\, dv, \qquad d\sigma \sin\theta = -(p\, du + p_1\, dv).$$

L'élément linéaire de la sphère sur laquelle on effectue la représentation de la surface aura donc pour valeur

$$(4)\qquad d\sigma^2 = (p\, du + p_1\, dv)^2 + (q\, du + q_1\, dv)^2.$$

Enfin l'angle $\omega - \theta$ d'une courbe tracée sur la surface avec sa représentation sphérique sera déterminé par l'une ou l'autre des deux équations

$$(5)\qquad \begin{cases} d\sigma \sin(\omega - \theta) = (p\, du + p_1\, dv)\cos\omega + (q\, du + q_1\, dv)\sin\omega, \\ d\sigma \cos(\omega - \theta) = (q\, du + q_1\, dv)\cos\omega - (p\, du + p_1\, dv)\sin\omega. \end{cases}$$

Ces formules nous seront très utiles. Nous allons maintenant résoudre quelques-unes des questions les plus importantes qui se présentent dans les applications.

486. Proposons-nous d'abord d'établir la relation qui doit exister entre deux tangentes conjuguées. Si le point M de la surface décrit une courbe, on obtiendra la conjuguée de la tangente à cette courbe en prenant l'intersection du plan tangent en M avec le plan tangent au point infiniment voisin de la courbe; en d'autres termes, la conjuguée est la caractéristique du plan tangent dans le mouvement du trièdre; elle est le lieu des points de ce plan dont la vitesse est dirigée dans le plan. Les formules (B) donnent les composantes de cette vitesse; si l'on écrit que la composante relative à Mz est nulle, on obtiendra l'équation

$$(p\,du + p_1\,dv)y - (q\,du + q_1\,dv)x = 0,$$

qui représente la tangente conjuguée. Appelons ω' l'angle qu'elle fait avec l'axe des x du trièdre (T); x et y seront proportionnels à $\cos\omega'$, $\sin\omega'$, et l'équation précédente deviendra

$$(6)\qquad (p\,du + p_1\,dv)\sin\omega' - (q\,du + q_1\,dv)\cos\omega' = 0.$$

Désignons par la lettre δ les différentielles relatives à un déplacement suivant la direction conjuguée; on aura

$$\delta s\cos\omega' = \xi\,\delta u + \xi_1\,\delta v, \qquad \delta s\sin\omega' = \eta\,\delta u + \eta_1\,\delta v.$$

En substituant ces valeurs de $\sin\omega'$, $\cos\omega'$ dans l'équation que nous venons d'obtenir, on trouvera

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &(p\eta - q\xi)\,du\,\delta u + (p_1\eta_1 - q_1\xi_1)\,dv\,\delta v \\ &+ (p\eta_1 - q\xi_1)\,du\,\delta v + (p_1\eta - q_1\xi)\,\delta u\,dv = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette relation est, comme il fallait s'y attendre, parfaitement symétrique par rapport aux différentielles d, δ; car les coefficients de $du\,\delta v$ et de $\delta u\,dv$ sont égaux en vertu de la dernière des formules (A). Il suit de là que la relation (6) peut aussi être écrite sous la forme suivante :

$$(6)'\qquad (p\,\delta u + p_1\,\delta v)\sin\omega - (q\,\delta u + q_1\,\delta v)\cos\omega = 0.$$

On pourrait encore établir comme il suit la relation entre deux tangentes conjuguées. On déduit des formules précédentes (3)

$$(8)\quad d\sigma\cos(\omega' - \theta) = (q\,du + q_1\,dv)\cos\omega' - (p\,du + p_1\,dv)\sin\omega'.$$

Or, si les deux directions définies par les angles ω, ω' sont

conjuguées, on aura, d'après une propriété déjà démontrée [I, p. 201],

$$\omega' - \theta = \frac{\pi}{2}.$$

En introduisant cette hypothèse dans l'équation (8), on sera conduit de nouveau à la relation (6).

487. Si l'on suppose que les deux directions conjuguées coïncident, il faudra remplacer partout δ par d, ω' par ω ; et l'on aura l'équation différentielle des lignes asymptotiques sous les deux formes suivantes :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (p\eta - q\xi)\,du^2 + (p\eta_1 - q\xi_1 + p_1\eta - q_1\xi)\,du\,dv + (p_1\eta_1 - q_1\xi_1)\,dv^2 = 0, \\ (p\,du + p_1\,dv)\sin\omega - (q\,du + q_1\,dv)\cos\omega = 0. \end{array} \right.$$

En comparant la seconde de ces équations à l'une des formules (5), on reconnaît immédiatement une propriété caractéristique des lignes asymptotiques; *elles font, en chaque point, un angle droit avec l'élément correspondant de leur représentation sphérique.*

La seconde équation (9) exprime aussi, nous le verrons plus loin, que le plan osculateur de la ligne asymptotique est tangent à la surface.

488. Cherchons maintenant l'équation différentielle des lignes de courbure. On obtient toutes les propriétés essentielles relatives à ces lignes en se plaçant à des points de vue divers, que nous allons successivement examiner.

On peut d'abord chercher les déplacements du trièdre mobile pour lesquels la normale à la surface, axe des z de ce trièdre, engendre une surface développable.

Pour qu'il en soit ainsi, il faudra qu'il existe sur l'axe des z du trièdre mobile un point variable

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = \rho,$$

décrivant, dans le mouvement considéré, une courbe constamment tangente à cet axe. Or les projections du déplacement de ce point quand u et v prennent les accroissements du, dv sont, d'après

les formules (B),

$$\begin{gathered}\xi\,du + \xi_1\,dv + (q\,du + q_1\,dv)\rho,\\ \eta\,du + \eta_1\,dv - (p\,du + p_1\,dv)\rho,\\ d\rho.\end{gathered}$$

Pour que la courbe décrite soit tangente à l'axe des z, il est nécessaire et suffisant que les deux premières projections soient nulles. On a donc

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}&\xi\,du + \xi_1\,dv + \rho(q\,du + q_1\,dv) = 0,\\ &\eta\,du + \eta_1\,dv - \rho(p\,du + p_1\,dv) = 0.\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations font connaître à la fois $\frac{du}{dv}$ et ρ. Cette dernière quantité est évidemment le rayon de courbure principal correspondant à la ligne de courbure considérée.

Si l'on élimine ρ, on obtient l'équation différentielle

$$(11)\quad (p\,du + p_1\,dv)(\xi\,du + \xi_1\,dv) + (q\,du + q_1\,dv)(\eta\,du + \eta_1\,dv) = 0,$$

qui caractérise les deux lignes de courbure. On peut lui donner la forme suivante

$$(11)_a\qquad (p\,du + p_1\,dv)\cos\omega + (q\,du + q_1\,dv)\sin\omega = 0,$$

qui, rapprochée des formules (5), montre que *les tangentes à une ligne de courbure et à son image sphérique sont parallèles.*

Si l'on élimine au contraire $\frac{du}{dv}$, on obtiendra l'équation aux rayons de courbure principaux

$$(12)\quad \rho^2(pq_1 - qp_1) + \rho(q\eta_1 - q_1\eta - \xi p_1 + \xi_1 p) + \xi\eta_1 - \eta\xi_1 = 0.$$

489. On retrouve encore les lignes de courbure en étudiant une des questions fondamentales relatives au déplacement du trièdre (T). Nous avons vu que, parmi les mouvements infiniment petits qui se produisent à partir d'une position donnée, il y en a deux, réels ou imaginaires, qui se réduisent à des rotations. La valeur de $\frac{du}{dv}$ et l'axe de rotation relatifs à ces mouvements sont définis par les équations (6) [I, p. 68] qui se réduisent ici aux sui-

vantes :

$$(13)\quad \begin{cases} \xi\, du + \xi_1\, dv + (q\, du + q_1\, dv)z - (r\, du + r_1\, dv)y = 0, \\ \eta\, du + \eta_1\, dv + (r\, du + r_1\, dv)x - (p\, du + p_1\, dv)z = 0, \\ \qquad\qquad (p\, du + p_1\, dv)y - (q\, du + q_1\, dv)x = 0. \end{cases}$$

On en déduit d'abord l'équation

$$(p\, du + p_1\, dv)(\xi\, du + \xi_1\, dv) + (q\, du + q_1\, dv)(\eta\, du + \eta_1\, dv) = 0,$$

qui définit les valeurs de $\frac{du}{dv}$ correspondantes aux deux rotations. Or, dans le cas qui nous occupe, l'équation précédente est celle des lignes de courbure.

De plus, l'axe de rotation relatif à chaque ligne de courbure va rencontrer la normale à la surface au centre de courbure correspondant. Cela résulte de la comparaison des formules (10) et (13). En réunissant tous ces résultats, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Dans le déplacement du trièdre (T) *lié à la surface, les mouvements infiniment petits qui se réduisent à des rotations sont toujours réels; ils correspondent à des déplacements de l'origine s'effectuant suivant les lignes de courbure de la surface. Les axes correspondants à ces rotations, qui sont évidemment situés, pour chaque ligne de courbure, dans le plan normal à cette ligne, vont en outre passer par le centre de courbure principal correspondant.*

490. Il nous reste maintenant à étudier les propriétés relatives à une courbe quelconque tracée sur la surface. Nous avons déjà obtenu les formules relatives à la tangente

$$(14)\quad \begin{cases} \cos\omega = \dfrac{\xi\, du + \xi_1\, dv}{ds}, \\[2ex] \sin\omega = \dfrac{\eta\, du + \eta_1\, dv}{ds}. \end{cases}$$

Nous allons maintenant indiquer celles qui concernent la normale principale.

Nous savons [I, p. 11] que si, par un point fixe de l'espace, on mène une parallèle à la tangente de la courbe, d'une longueur

égale à l'unité, la vitesse de l'extrémité de cette parallèle, en supposant que l'arc de la courbe soit égal au temps, sera égale en grandeur à la courbure de la courbe $\frac{1}{\rho}$ et aura la direction et le sens de la normale principale.

Or si, par le même point fixe, on mène des parallèles aux arêtes du trièdre mobile, on formera le nouveau trièdre (T_1) déjà défini, dont les rotations seront, quand on se déplacera sur la courbe,

$$\frac{p\,du + p_1\,dv}{ds}, \quad \frac{q\,du + q_1\,dv}{ds}, \quad \frac{r\,du + r_1\,dv}{ds}.$$

L'extrémité de la parallèle à la tangente aura pour coordonnées relatives

$$\cos\omega, \quad \sin\omega, \quad 0.$$

En appliquant les formules (4) [I, p. 48] qui donnent la projection de la vitesse sur les axes mobiles, on obtiendra les formules

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{ds}{\rho}\cos\xi' &= -\sin\omega(d\omega + r\,du + r_1\,dv),\\ \frac{ds}{\rho}\cos\eta' &= +\cos\omega(d\omega + r\,du + r_1\,dv),\\ \frac{ds}{\rho}\cos\zeta' &= +\sin\omega(p\,du + p_1\,dv) - \cos\omega(q\,du + q_1\,dv), \end{aligned}\right.$$

ξ', η', ζ' désignant les angles de la normale principale avec les axes des x, des y et des z du trièdre (T_1) ou du trièdre (T).

Ces relations prouvent que l'on peut prendre

$$(16)\qquad \cos\xi' = -\sin\omega\sin\varpi, \qquad \cos\eta' = \cos\omega\sin\varpi, \qquad \cos\zeta' = \cos\varpi.$$

ϖ désignera l'angle de la normale à la surface avec le plan osculateur de la courbe ; et les formules (15) pourront être remplacées par les deux suivantes :

$$(17)\qquad \frac{ds\cos\varpi}{\rho} = \sin\omega(p\,du + p_1\,dv) - \cos\omega(q\,du + q_1\,dv),$$

$$(18)\qquad \frac{ds\sin\varpi}{\rho} = d\omega + r\,du + r_1\,dv.$$

Ces formules appellent plusieurs remarques.

La première nous montre immédiatement que $\frac{\cos\varpi}{\rho}$ demeure le

même pour toutes les courbes ayant même tangente. Nous retrouvons ainsi le théorème de Meusnier et nous voyons que notre première formule donne ce que l'on appelle la *courbure normale*, c'est-à-dire la courbure de la section normale tangente à la courbe.

Quant à la seconde formule, elle définit un élément qui, comme nous le verrons, joue un rôle important dans la théorie de la déformation des surfaces. Considérons le cylindre projetant la courbe sur le plan tangent. D'après le théorème de Meusnier, $\frac{\sin\varpi}{\rho}$ sera la courbure de la section normale du cylindre tangente à la courbe, c'est-à-dire la courbure de la projection de la courbe sur le plan tangent.

M. Liouville, qui l'a considérée après M. O. Bonnet, lui a donné le nom, accepté par tous les géomètres, de *courbure géodésique* (1).

Nous appellerons *centre de courbure normale* le centre de courbure de la section plane normale tangente à la courbe, et *centre de courbure géodésique* le centre de courbure de la projection de la courbe sur le plan tangent.

D'après le théorème de Meusnier, ces deux centres se trouvent sur l'axe du cercle osculateur de la courbe considérée.

On sait que l'on appelle *ligne géodésique* toute ligne dont le plan osculateur est, en chaque point, normal à la surface. L'équation différentielle des lignes géodésiques est donc

$$d\omega + r\,du + r_1\,dv = 0. \qquad (19)$$

491. La formule (17) nous permet d'obtenir, d'une manière nouvelle, l'équation différentielle des lignes de courbure. On sait, en effet, que ces lignes sont tangentes aux sections normales de plus grande ou de plus petite courbure. Elles sont donc déter-

---

(1) O. BONNET, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXIIe Cahier, p. 1; 1848). Présenté en 1844 à l'Académie des Sciences.

J. LIOUVILLE, *Sur la théorie générale des surfaces* (*Journal de Liouville*, t. XVI, p. 130; 1851).

minées par l'équation

$$\frac{\partial}{d\omega}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right) = 0,$$

où l'on regarde $\frac{\cos\varpi}{\rho}$ comme une fonction de u, v et de ω. Or on a

$$\frac{\cos\varpi}{\rho} = \sin\omega\,\frac{p\,du + p_1\,dv}{ds} - \cos\omega\,\frac{q\,du + q_1\,dv}{ds}.$$

Les expressions de $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$ en fonction de ω se déduiront des formules déjà données (14). On aura

$$\frac{du}{ds} = \frac{\eta_1\cos\omega - \xi_1\sin\omega}{\eta_1\xi - \xi_1\eta}, \qquad \frac{dv}{ds} = \frac{\xi\sin\omega - \eta\cos\omega}{\eta_1\xi - \xi_1\eta}.$$

En faisant usage de ces équations pour calculer les dérivées de $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$ considérées comme fonction de la seule variable ω et retranchant du second membre, après la dérivation, la quantité

$$(p\eta_1 - p_1\eta - q\xi_1 + q_1\xi)(\sin^2\omega + \cos^2\omega),$$

qui est nulle en vertu de la dernière des équations (A), on obtient l'identité

$$(20)\qquad \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right) = 2\cos\omega\,\frac{p\,du + p_1\,dv}{ds} + 2\sin\omega\,\frac{q\,du + q_1\,dv}{ds},$$

dont nous aurons à faire usage. En égalant le second membre à zéro, on retrouve bien l'équation différentielle des lignes de courbure.

492. Nous allons maintenant passer aux éléments du troisième ordre. Remarquons d'abord que les angles λ', μ', ν' de la binormale avec les axes du trièdre (T) sont connus, puisque nous avons déjà déterminé ceux de la tangente à la courbe et de la normale principale. En appliquant les formules (1) [I, p. 3], on a

$$(21)\qquad \cos\lambda' = \sin\omega\cos\varpi, \qquad \cos\mu' = -\cos\omega\cos\varpi, \qquad \cos\nu' = \sin\varpi.$$

Nous savons aussi [I, p. 11] que si, par un point fixe, nous menons une droite de longueur égale à 1, parallèle à la binormale,

l'extrémité de cette droite aura, quand on se déplacera sur la courbe, un déplacement égal à $\frac{ds}{\tau}$ et la direction de ce déplacement sera celle de la normale principale. Reprenons donc le trièdre (T_1) déjà considéré, ayant le point fixe pour origine et parallèle au trièdre (T). L'extrémité de la parallèle à la binormale menée par l'origine aura pour coordonnées

$$\sin\omega\cos\varpi, \quad -\cos\omega\cos\varpi, \quad \sin\varpi$$

et les projections de la vitesse de ce point sur les axes mobiles devront être, en tenant compte des valeurs déjà données des cosinus directeurs de la normale principale,

$$\frac{-\sin\omega\sin\varpi}{\tau}, \quad \frac{\cos\omega\sin\varpi}{\tau}, \quad \frac{\cos\varpi}{\tau}.$$

En appliquant donc l'une quelconque des formules (4) [I, p. 48] qui donnent la projection de la vitesse, la dernière par exemple, on aura

$$\frac{\cos\varpi}{\tau} = \cos\varpi\frac{d\varpi}{ds} - \frac{p\,du + p_1\,dv}{ds}\cos\varpi\cos\omega - \frac{q\,du + q_1\,dv}{ds}\cos\varpi\sin\omega$$

et, en divisant par $\cos\varpi$,

$$(22) \qquad \frac{1}{\tau} - \frac{d\varpi}{ds} = -\frac{p\,du + p_1\,dv}{ds}\cos\omega - \frac{q\,du + q_1\,dv}{ds}\sin\omega.$$

On voit que *le premier membre demeure le même pour toutes les courbes ayant même tangente.* Ce résultat important est dû à M. O. Bonnet. On peut encore donner à l'équation précédente la forme suivante :

$$(23) \qquad \frac{1}{\tau} - \frac{d\varpi}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right),$$

la dérivée par rapport à ω ayant même signification que dans l'équation (20).

493. Pour obtenir tout ce qui se rapporte au troisième ordre, il faut encore connaître $\frac{d\rho}{ds}$. Pour cela nous différentierons la formule qui donne $\frac{\cos\varpi}{\rho}$.

Cette quantité étant toujours considérée comme une fonction de u, v et de ω, nous avons

$$d\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)du + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)dv + \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)d\omega$$

ou, en remplaçant $d\omega$ par sa valeur

$$\frac{\sin\varpi\, ds}{\rho} - r\,du - r_1\,dv$$

déduite de la formule (18),

$$d\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right) - \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)\frac{\sin\varpi\, ds}{\rho} = \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right) - r\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)\right]du + \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right) - r_1\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)\right]dv.$$

On voit que le second membre peut être écrit sous la forme

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right) - r\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)\right]du \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right) - r_1\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)\right]dv = K\,ds, \end{aligned}\right.$$

K ne dépendant que de la direction de la tangente à la courbe. Quant au premier membre, si l'on y remplace $\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)$ par sa valeur tirée de la formule (23), il ne contient plus que des quantités ayant une signification géométrique simple, et l'on obtient l'équation

$$(25)\qquad d\frac{\cos\varpi}{\rho} + \frac{2\sin\varpi}{\rho}\left(\frac{ds}{\tau} - d\varpi\right) = K\,ds,$$

qui permettra évidemment de calculer $\frac{d\rho}{ds}$.

En divisant les deux membres de l'équation (25) par $\frac{\cos\varpi}{\rho}$, on aura

$$(26)\qquad -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds} + \operatorname{tang}\varpi\left(\frac{2}{\tau} - 3\frac{d\varpi}{ds}\right) = \frac{K\rho}{\cos\varpi}.$$

K et $\frac{\rho}{\cos\varpi}$ ne dépendant nullement des éléments du second ordre mais seulement de la direction de la tangente à la courbe, on voit dès à présent que le premier membre de l'équation (26), et aussi

celui de l'équation (25) divisé par ds, demeureront les mêmes pour deux courbes ayant la même tangente au point donné, bien que les éléments dont ils dépendent soient du deuxième et du troisième ordre. Nous aurons à développer les conséquences de ce résultat, qui est dû à Laguerre [1].

Pour terminer ce qui se rapporte au troisième ordre, nous déterminerons le centre de la sphère osculatrice. En appliquant les formules connues et en désignant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de cette sphère, nous trouverons

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} &x_0 \cos\omega + y_0 \sin\omega = 0,\\ &\sin\varpi(-x_0 \sin\omega + y_0 \cos\omega) + z_0 \cos\varpi = \rho,\\ &\cos\varpi(x_0 \sin\omega - y_0 \cos\omega) + z_0 \sin\varpi = -\tau\frac{d\rho}{ds}, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{-x_0}{\sin\omega} = \frac{y_0}{\cos\omega} = \rho\sin\varpi + \tau\frac{d\rho}{ds}\cos\varpi,\\ &z_0 = \rho\cos\varpi - \tau\frac{d\rho}{ds}\sin\varpi. \end{aligned}\right.$$

Les deux premières équations (27) représentent l'axe du cercle osculateur. En prenant l'intersection de cet axe soit avec la normale, soit avec le plan tangent, on a :

1° Le centre de courbure normale

$$(29)\qquad x_1 = y_1 = 0, \qquad z_1 = \frac{\rho}{\cos\varpi};$$

2° Le centre de courbure géodésique

$$(30)\qquad x_2 = -\frac{\rho\sin\omega}{\sin\varpi}, \qquad y_2 = \frac{\rho\cos\omega}{\sin\varpi}, \qquad z_2 = 0.$$

494. Après le troisième ordre, il ne reste plus d'élément géométrique à calculer. Les dérivées des éléments ρ, ϖ et τ s'obtiendront par la simple différentiation des formules précédentes. Il nous paraît bon toutefois de remarquer que l'on pourra écrire, si

---

(1) LAGUERRE, *Sur une propriété relative aux courbes tracées sur une surface quelconque* (*Bulletin de la Société philomathique*, t. VII, p. 49; 1870).

l'on veut, pour les éléments différentiels d'un ordre quelconque, deux formules analogues aux relations (23) et (25). Supposons, en effet, que l'on ait une équation de la forme

$$\Phi = K,$$

Φ contenant les éléments différentiels de la courbe jusqu'à l'ordre n et K étant fonction seulement de u, v et de ω. La différentiation de cette équation nous donnera

$$d\Phi = \frac{\partial K}{\partial u}du + \frac{\partial K}{\partial v}dv + \frac{\partial K}{\partial \omega}d\omega,$$

et l'on déduira de là

$$\frac{d\Phi}{ds} - \frac{\partial K}{\partial \omega}\frac{\sin\varpi}{\rho} = \frac{\partial K}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial K}{\partial v}\frac{dv}{ds} - \frac{\partial K}{\partial \omega}\left(r\frac{du}{ds} + r_1\frac{dv}{ds}\right).$$

Cette formule conserve la forme de celle d'où on l'a déduite : le second membre y dépend seulement de u, v et de ω; mais le premier membre contient les éléments différentiels de la courbe jusqu'à l'ordre $n+1$.

Si l'on applique cette méthode aux deux formules (23) et (25), on en déduira deux équations nouvelles se rapportant aux éléments du quatrième ordre, et l'on pourra continuer ainsi jusqu'à un ordre quelconque.

Par exemple, de la formule (23) on déduira la suivante, que nous nous contenterons d'énoncer,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{d\varpi}{ds}\right) - \frac{\sin\varpi}{\rho}\left(\frac{2\cos\varpi}{\rho} - \frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) = K_1,$$

K_1 demeurant le même pour deux courbes qui ont la même tangente, et R, R' désignant les rayons de courbure principaux de la surface.

CHAPITRE II.

LES FORMULES DE M. CODAZZI.

Formules relatives aux coordonnées obliques, l'élément linéaire étant déterminé par l'équation

$$ds^2 = A^2\, du^2 + C^2\, dv^2 + 2\,AC \cos\alpha\; du\, dv.$$

Angle de deux courbes. — Condition pour que deux directions soient conjuguées. — Lignes asymptotiques. — Lignes de courbure. — Théorème de Gauss. — Courbure totale et courbure moyenne. — Coordonnées curvilignes rectangulaires; formules de M. Codazzi. — Étude particulière relative au système coordonné formé par les lignes de courbure. — Application de la méthode générale au système de coordonnées formé par les lignes de longueur nulle. — Détermination des quantités $p, q, r, p_1, q_1, r_1, \xi, \eta, \xi_1, \eta_1$ lorsqu'on connaît les expressions des coordonnées rectangulaires x, y, z en fonction de deux paramètres u, v. — Application à l'ellipsoïde que l'on suppose rapporté à ses lignes de courbure.

---

495. Nous nous sommes contentés jusqu'ici de supposer que l'axe des z du trièdre (T) était la normale à la surface. Dans les questions où intervient l'élément linéaire de la surface, il importe de définir d'une manière plus précise la relation entre le trièdre et la surface, afin de reconnaître quelles sont les quantités qui demeurent invariables quand on déforme la surface.

A la vérité, ce résultat pourrait être atteint avec les notations précédentes; il suffirait de remarquer que, si la surface se déforme en entraînant avec elle le trièdre (T), les translations ξ, η, ξ_1, η_1 demeurent invariables et, par conséquent, aussi les rotations r, r_1, en vertu de la quatrième et de la cinquième des formules (A). On reconnaîtrait ainsi immédiatement que la courbure géodésique d'une courbe quelconque, le produit des rayons de courbure principaux en chaque point de la surface conservent leur valeur après toute déformation de la surface. Mais ces résultats, et d'autres encore, apparaîtront d'une manière plus nette si l'on part d'une forme donnée *a priori* de l'élément linéaire. Nous allons donc considérer successivement les divers systèmes de coordonnées.

Supposons d'abord que les points de la surface soient rapportés à des coordonnées obliques pour lesquelles l'élément linéaire prendra la forme

$$ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2 + 2AC \cos\alpha \, du \, dv. \tag{1}$$

Pour achever de définir la position du trièdre (T), nous donnerons l'angle m que fait l'axe des x avec la tangente à la courbe $v = \text{const.}$, c'est-à-dire avec l'arc infiniment petit $A\,du$. Si l'on désigne de même par n l'angle que fait avec le même axe l'arc infiniment petit $C\,dv$, on aura évidemment

$$n - m = \pm\alpha.$$

L'angle α n'entrant que par son cosinus dans l'élément linéaire, on peut prendre

$$n - m = \alpha. \tag{2}$$

Il est aisé de comprendre pourquoi nous ne donnons pas à l'angle m une valeur particulière. Dans le cas des coordonnées rectangulaires, il serait naturel de faire coïncider les axes des x et des y du trièdre mobile avec les tangentes aux courbes coordonnées; mais, si ces courbes ne se coupent pas à angle droit, la Géométrie n'indique aucune position particulière pour les axes du trièdre mobile. Faire coïncider l'un d'eux avec l'une des tangentes aux courbes coordonnées serait détruire la symétrie qui doit exister dans les formules entre les deux variables u et v. Cette symétrie serait conservée, il est vrai, si l'on prenait pour axes les bissectrices des tangentes aux courbes coordonnées; mais ce choix aurait l'inconvénient de ne pas coïncider avec celui qui est le plus naturel quand les coordonnées deviennent rectangulaires. Il nous paraît donc préférable de conserver cette arbitraire m, sauf à lui donner la valeur qui sera la plus avantageuse dans l'étude de chaque question.

Quand u varie seule, l'origine du trièdre décrit dans le plan tangent l'arc $A\,du$ qui fait l'angle m avec l'axe des x. On aura donc

$$\xi = A\cos m, \qquad \eta = A\sin m, \tag{3}$$

et de même

$$\xi_1 = C\cos n, \qquad \eta_1 = C\sin n. \tag{4}$$

Introduisons ces valeurs des translations dans les formules du Chapitre précédent. Le système (A) prendra la forme

$$
(\mathrm{A}')\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1,\\
&\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - p r_1,\\
&\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1,\\
&r = -\frac{\partial n}{\partial u} - \frac{1}{\mathrm{C}\sin\alpha}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u}\cos\alpha\right),\\
&r_1 = -\frac{\partial m}{\partial v} + \frac{1}{\mathrm{A}\sin\alpha}\left(\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u} - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v}\cos\alpha\right),\\
&\mathrm{A}(p_1 \sin m - q_1 \cos m) = \mathrm{C}(p \sin n - q \cos n).
\end{aligned}
\right.
$$

La quatrième et la cinquième équation ont été résolues par rapport à r et à r_1.

496. L'angle ω de la tangente à une courbe tracée sur la surface et la différentielle ds de l'arc de cette courbe seront maintenant définis par les formules

$$
(5)\quad
\left\{
\begin{aligned}
ds \cos\omega &= \mathrm{A}\cos m\, du + \mathrm{C}\cos n\, dv,\\
ds \sin\omega &= \mathrm{A}\sin m\, du + \mathrm{C}\sin n\, dv,
\end{aligned}
\right.
$$

qui donnent

$$
(6)\qquad \mathrm{A}\frac{du}{ds} = \frac{\sin(n-\omega)}{\sin\alpha}, \qquad \mathrm{C}\frac{dv}{ds} = \frac{\sin(\omega - m)}{\sin\alpha}.
$$

D'après cela, si l'on considère deux courbes différentes passant par le même point de la surface et si l'on désigne par la lettre δ les différentielles relatives à la seconde courbe, par ω' l'angle analogue à ω, l'angle des deux courbes sera donné par les formules

$$
(7)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\cos(\omega-\omega') &= \frac{\mathrm{A}^2 du\,\delta u + \mathrm{AC}\cos\alpha(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \mathrm{C}^2 dv\,\delta v}{ds\,\delta s},\\
\sin(\omega-\omega') &= \frac{\mathrm{AC}\sin\alpha(dv\,\delta u - du\,\delta v)}{ds\,\delta s}.
\end{aligned}
\right.
$$

Cet angle ne dépend, on le voit, que de l'expression de l'élément linéaire; par conséquent, il ne changera pas quand on déformera la surface. Ce résultat avait été déjà signalé (n° 119).

La condition pour que deux directions soient conjuguées de-

viendra ici

$$(8)\quad \begin{cases} A(q\cos m - p\sin m)\,du\,\delta u + C(q_1\cos n - p_1\sin n)\,dv\,\delta v \\ \quad + A(q_1\cos m - p_1\sin m)\,\delta u\,dv + C(q\cos n - p\sin n)\,du\,\delta v = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, l'équation différentielle des lignes asymptotiques sera

$$(9)\quad \begin{cases} A(q\cos m - p\sin m)\,du^2 + C(q_1\cos n - p_1\sin n)\,dv^2 \\ \quad + [A(q_1\cos m - p_1\sin m) + C(q\cos n - p\sin n)]\,dv\,du = 0. \end{cases}$$

Enfin les deux équations qui définissent les lignes de courbure deviendront

$$(10)\quad \begin{cases} A\cos m\,du + C\cos n\,dv + (q\,du + q_1\,dv)\rho = 0, \\ A\sin m\,du + C\sin n\,dv - (p\,du + p_1\,dv)\rho = 0. \end{cases}$$

L'équation différentielle de ces lignes développée s'écrira

$$(11)\quad \begin{cases} A(p\cos m + q\sin m)\,du^2 + C(p_1\cos n + q_1\sin n)\,dv^2 \\ \quad + [C(p\cos n + q\sin n) + A(p_1\cos m + q_1\sin m)]\,du\,dv = 0. \end{cases}$$

Mais nous devons surtout insister sur la forme nouvelle que prendra l'équation du second degré qui détermine les rayons de courbure principaux. Elle devient ici

$$(12)\quad \begin{cases} \rho^2(pq_1 - qp_1) \\ \quad - \rho[A(p_1\cos m + q_1\sin m) - C(p\cos n + q\sin n)] + AC\sin\alpha = 0. \end{cases}$$

On en déduit, par conséquent, en désignant par R, R′ les deux rayons de courbure principaux,

$$(13)\quad AC\sin\alpha\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = A(p_1\cos m + q_1\sin m) - C(p\cos n + q\sin n),$$

$$(14)\quad \frac{AC\sin\alpha}{RR'} = pq_1 - qp_1.$$

Remplaçons $pq_1 - qp_1$ par son expression déduite de la troisième des formules (A′); il viendra

$$(15)\quad \frac{AC\sin\alpha}{RR'} = \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u},$$

ou, en remplaçant r et r_1 par leurs valeurs,

$$(16)\quad \frac{AC\sin\alpha}{RR'} = -\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\dfrac{\partial C}{\partial u} - \dfrac{\partial A}{\partial v}\cos\alpha}{A\sin\alpha}\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\dfrac{\partial A}{\partial v} - \dfrac{\partial C}{\partial u}\cos\alpha}{C\sin\alpha}\right].$$

Cette formule donne immédiatement le beau théorème de Gauss. Le produit des rayons de courbure principaux ne dépend que de l'expression de l'élément linéaire et subsiste quand la surface est déformée sans déchirure ni duplicature.

497. L'expression $\frac{1}{RR'}$ a reçu le nom de *courbure totale* de la surface; celui de *courbure moyenne* a été donné à la somme $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$.

On a écrit des Mémoires pour chercher laquelle de ces deux quantités doit servir de mesure à la courbure de la surface en un point donné. Les géomètres qui ont traité ce sujet ne se sont pas aperçus qu'ils renouvelaient, sous d'autres espèces, la célèbre question des forces vives, et qu'ils soulevaient une question qui doit se résoudre par une définition de mots. Tout au plus pourrait-on essayer de raisonner par analogie, en examinant les propriétés relatives à la courbure des lignes planes qui sont susceptibles d'être généralisées dans la théorie des surfaces. Si toutes ces généralisations se rapportaient, par exemple, à la quantité que nous avons appelée la *courbure totale,* les géomètres auraient eu quelque raison de réserver le nom de *courbure* à cet élément. Mais ce moyen indirect de résoudre la question échappe complètement; parmi les propriétés relatives à la courbure dans les lignes planes, les unes admettent une généralisation dans laquelle on emploie la courbure totale; pour d'autres au contraire, il faut faire intervenir la courbure moyenne; quelques-unes d'entre elles admettent même des généralisations différentes dans lesquelles on a à employer tantôt la courbure moyenne, tantôt la courbure totale.

Nous allons d'abord montrer, d'après Gauss, qu'on peut adopter une définition de la courbure totale tout à fait analogue à celle de la courbure dans les lignes planes.

Étant donné un arc de courbe plane, si, par le centre d'un cercle de rayon 1, on mène des parallèles aux normales à l'extrémité de cet arc, ces parallèles interceptent un arc de cercle qui est égal à l'angle des tangentes aux deux extrémités de la courbe et qui, par conséquent, mesure ce que l'on appelle la *courbure* de l'arc de courbe.

De même, si l'on considère une étendue de surface limitée par

une courbe fermée et que l'on mène par le centre d'une sphère de rayon 1 des parallèles aux normales de la surface en tous les points de sa courbe limite, ces parallèles couperont la sphère suivant une courbe également fermée. Il y aura une portion de la sphère, limitée par cette courbe, qui contiendra tous les points de la sphère correspondants aux différents points du segment de surface considéré. L'aire de cette portion de la sphère s'appellera la *courbure totale du segment de surface*.

Revenons à la courbe plane. Si l'on divise la courbure totale d'un arc de la courbe par la longueur de cet arc, on démontre que ce quotient tend vers une limite finie et déterminée quand l'arc diminue indéfiniment et se réduit à un point; cette limite est, par définition, la courbure en ce point.

Si l'on envisage de même un segment de surface entourant un point M de la surface, et si l'on suppose que l'étendue de ce segment diminue indéfiniment, et dans tous les sens, autour du point M, la courbure totale du segment diminue indéfiniment; mais, si on la divise par l'aire de la même région, le quotient obtenu tendra, comme nous allons le démontrer, vers une limite finie et déterminée, indépendante de la forme du segment. Cette limite est $\frac{1}{RR'}$, c'est-à-dire l'élément auquel nous avons donné le nom de *courbure totale au point* M.

En nous plaçant au point de vue précédent, il semble donc que l'analogie est complète entre la courbure dans les courbes et la courbure totale dans les surfaces. Mais on peut indiquer d'autres propositions dans lesquelles cette analogie est détruite et qu'on peut généraliser en substituant à la courbure de la ligne plane la courbure moyenne de la surface et non plus la courbure totale.

Imaginons, par exemple, qu'on porte des longueurs infiniment petites sur les normales d'une courbe, de manière à obtenir une courbe voisine. Si h désigne la longueur portée sur chaque normale, l'accroissement de longueur quand on passera de la première courbe à la seconde sera représentée par l'intégrale

$$\int h\frac{ds}{\rho},$$

où ds désigne la différentielle de l'arc et ρ le rayon de courbure.

Si l'on opère de même sur une portion de surface, l'accroissement de l'aire, quand on passera à la surface infiniment voisine, sera (n° 185)

$$\iint h\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)d\sigma,$$

$d\sigma$ désignant l'élément d'aire et R, R' les rayons de courbure principaux. Ici, on le voit, l'élément qui se substitue à la courbure dans la proposition généralisée n'est plus la courbure totale; c'est le double de la courbure moyenne.

Il est inutile d'insister sur cet exemple et sur d'autres que l'on pourrait invoquer. On peut dire que la courbure totale a plus d'importance en Géométrie; comme elle ne dépend que de l'élément linéaire, elle intervient dans toutes les questions relatives à la déformation des surfaces. En Physique mathématique, au contraire, c'est la courbure moyenne qui paraît jouer le rôle prépondérant.

498. Il nous reste maintenant à bien préciser la définition de la courbure totale et à démontrer la proposition de Gauss que nous avons énoncée plus haut.

Soient M un point de la surface et M' le point correspondant de la sphère de rayon 1 sur laquelle on effectue la représentation. Menons par M' des parallèles aux axes du trièdre (T). Nous aurons ainsi un trièdre (T') dont les rotations seront évidemment les mêmes que celles du trièdre (T), et qui jouera par rapport à la sphère le même rôle que le trièdre (T) par rapport à la surface; car son axe des z sera la normale à la sphère. Soit

$$ds^2 = A'^2 du^2 + 2A'C'\cos\alpha'\, du\, dv + C'^2 dv^2$$

l'expression de l'élément linéaire de la sphère. L'élément superficiel aura pour valeur

$$A'C'\sin\alpha'\, du\, dv,$$

en grandeur et en signe. Cela posé, appliquons à la sphère la formule (14).

Nous aurons, puisque les rotations du trièdre (T') sont les mêmes que celles du trièdre (T),

$$A'C'\sin\alpha' = pq_1 - qp_1,$$

et, par suite, en tenant compte de la formule (14),

$$A'C' \sin\alpha' = \frac{AC \sin\alpha}{RR'}.$$

Donc la courbure totale d'une portion de la surface, qui, d'après la définition même de Gauss, est représentée par l'intégrale

$$\int\int A'C' \sin\alpha' \, du \, dv$$

étendue à cette portion de surface, le sera aussi par l'intégrale

$$\int\int \frac{AC \sin\alpha}{RR'} \, du \, dv,$$

étendue à la même région.

Si donc on divise la courbure totale d'un segment de surface par l'aire de ce segment, le quotient sera

$$\frac{\displaystyle\int\int \frac{AC \sin\alpha}{RR'} \, du \, dv}{\displaystyle\int\int AC \sin\alpha \, du \, dv}.$$

Pour supprimer toute difficulté relative au choix des coordonnées, désignons par $d\sigma$ l'élément superficiel et écrivons le quotient précédent sous la forme

$$\frac{\displaystyle\int\int \frac{d\sigma}{RR'}}{\displaystyle\int\int d\sigma}.$$

Il est évident qu'il aura pour valeur

$$\left(\frac{1}{RR'}\right)_0,$$

$\left(\frac{1}{RR'}\right)_0$ indiquant une moyenne entre toutes les valeurs de $\frac{1}{RR'}$ à l'intérieur du segment considéré. Si l'étendue de ce segment diminue de manière que les distances de tous ses points à un point M de l'intérieur tendent vers zéro, on voit que le rapport précédent aura pour limite la courbure totale de la surface en ce point. Ce rapport n'aurait aucune limite déterminée si, contrairement à l'hypothèse, le segment se réduisait non plus à un point,

mais à une ligne donnée, par la diminution d'une seule de ses deux dimensions.

499. Dans le cas où les coordonnées curvilignes choisies sont rectangulaires, les formules générales se simplifient beaucoup. Alors on peut faire coïncider l'axe des x du trièdre (T) avec la tangente à l'arc $A\,du$, c'est-à-dire avec la tangente à la courbe $v =$ const. Cela donnera

$$n = \frac{\pi}{2}, \qquad m = 0, \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Les formules (A′) prendront la forme plus simple

$$(\text{A}'') \quad \left\{ \begin{array}{ll} A q_1 + C p = 0, & \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1, \\ r = -\dfrac{1}{C}\dfrac{\partial A}{\partial v}, & \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - p r_1, \\ r_1 = \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial C}{\partial u}, & \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1; \end{array} \right.$$

elles coïncident, aux notations près, avec celles qui ont été données en premier lieu par M. D. Codazzi (¹).

(¹) CODAZZI (D.), *Mémoire relatif à l'application des surfaces les unes sur les autres, envoyé au Concours ouvert sur cette question, en* 1859, *par l'Académie des Sciences* (t. XXVII des *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, imprimé en 1882).

M. Codazzi donne aussi, dans un Appendice à son Travail, des formules relatives aux coordonnées obliques. Ces formules, différentes du système (A′), sont équivalentes à des relations que nous ferons connaître plus loin (nº 508). Les formules (A′), qui contiennent une arbitraire m, et où toutes les quantités sont définies par leurs propriétés cinématiques, ont été données en 1866 dans le Cours que j'ai eu l'honneur de faire comme suppléant de M. Joseph Bertrand, au Collège de France. M. Combescure, dans un Mémoire inédit présenté en 1864 à l'Académie des Sciences, avait déjà appliqué des considérations de Cinématique à la démonstration des formules de M. Codazzi. Le travail de M. Combescure traite *des déterminants fonctionnels et des coordonnées curvilignes;* il a été publié en 1867 dans les *Annales de l'École Normale* (t. IV, 1ʳᵉ série).

C'est M. O. Bonnet qui, le premier, a mis en évidence tout l'intérêt et toute l'utilité des formules de M. Codazzi relatives aux coordonnées rectangulaires. Après les avoir démontrées géométriquement dans une *Note sur la théorie de la déformation des surfaces gauches* insérée en 1863 aux *Comptes rendus* (t. LVII, p. 805), l'éminent géomètre en a fait une étude approfondie dans une *Addition* de 130 pages à son *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée*, inséré en 1867 au XLIIᵉ Cahier du *Journal de l'École Po-*

Les formules (B), [p. 348], qui donnent les projections du déplacement d'un point, prendront ici une forme plus simple et deviendront

$$(B'')\qquad \begin{cases} dx + A\,du + (q\,du + q_1\,dv)z - (r\,du + r_1\,dv)y, \\ dy + C\,dv + (r\,du + r_1\,dv)x - (p\,du + p_1\,dv)z, \\ dz \qquad\quad + (p\,du + p_1\,dv)y - (q\,du + q_1\,dv)x. \end{cases}$$

Quand on aura à appliquer les formules du Chapitre précédent, il faudra adopter les valeurs suivantes des translations

$$(17)\qquad \begin{cases} \xi = A, & \xi_1 = 0, \\ \eta = 0, & \eta_1 = C. \end{cases}$$

Si l'on considère une courbe quelconque tracée sur la surface, on aura

$$(18)\qquad \cos\omega = \frac{A\,du}{ds}, \qquad \sin\omega = \frac{C\,dv}{ds},$$

ω désignant maintenant l'angle de la tangente avec l'arc $A\,du$.

Les lignes de courbure seront définies par les deux équations

$$(19)\qquad \begin{cases} A\,du + \rho(q\,du + q_1\,dv) = 0, \\ C\,dv - \rho(p\,du + p_1\,dv) = 0; \end{cases}$$

lytechnique (p. 31-151). Cette partie du travail de M. Bonnet contient une démonstration complète et de nombreuses applications; nous aurons à la citer souvent. M. Bonnet s'est placé au même point de vue que M. Codazzi, et il a défini tous les éléments qui entrent dans les formules par des considérations de pure Géométrie.

Depuis 1867, un grand nombre de recherches ont été publiées sur le même sujet. Nous citerons en premier lieu celles de M. Codazzi insérées dans un grand travail : *Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio* (*Annali di Matematica* de Milan, t. I, p. 293-316; t. II, p. 101-119 et 269-287; t. IV, p. 16-25; 1867-1869). Nous avons aussi emprunté une formule très élégante à un Mémoire de M. Laguerre *Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces* publié en 1872 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. XI, 2ᵉ série, p. 60). Les méthodes de M. Laguerre ont été développées par M. Ch. Brisse dans un Mémoire intitulé : *Exposition analytique de la théorie des surfaces.* Ce Travail, dont la première Partie a paru en 1874 dans les *Annales de l'École Normale* (t. III, 2ᵉ série, p. 87) se trouve continué, mais non terminé, dans le LIIIᵉ Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (p. 213; 1883).

Mais je dois surtout signaler, comme offrant le plus d'analogie avec les méthodes suivies dans cette partie de mes leçons, celles que M. Ribaucour a déve-

l'élimination de ρ conduira à l'équation différentielle de ces lignes

$$(20)\qquad A p\, du^2 + C q_1\, dv^2 + (C q + A p_1)\, du\, dv = 0,$$

et celle de $\frac{du}{dv}$ à l'équation aux rayons de courbure principaux

$$(21)\qquad \rho^2\left(\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u}\right) - \rho(A p_1 - C q) + AC = 0.$$

En particulier, la courbure totale de la surface sera donnée par la formule

$$(22)\qquad \frac{AC}{RR'} = \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}\right).$$

Enfin la relation entre deux tangentes conjuguées prendra la forme

$$(23)\qquad A q\, du\, \delta u - C p_1\, dv\, \delta v + A q_1\, du\, \delta v - C p\, dv\, \delta u = 0,$$

et l'équation différentielle des lignes asymptotiques deviendra

$$(24)\qquad A q\, du^2 - C p_1\, dv^2 + (A q_1 - C p)\, du\, dv = 0.$$

500. On peut encore faire une hypothèse plus particulière, et envisager le cas, très important pour la théorie et les applications, où les deux systèmes de lignes coordonnées sont les lignes de

---

loppées, d'une manière plus ou moins complète, dans plusieurs de ses travaux, et qui se trouvent exposées d'une manière détaillée, sous le nom de *périmorphie*, dans le Mémoire couronné par l'Académie de Bruxelles : *Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle* (*Mémoires couronnés et Mémoires des Savants étrangers publiés par l'Académie Royale de Belgique*, t. XLIV; 1881). Toutefois, M. Ribaucour ne considère que des coordonnées curvilignes rectangulaires, il ne donne pas la définition cinématique des quantités qui entrent dans ses formules; les deux systèmes de formules qui tiennent dans sa théorie la place de nos systèmes (A) et (B) nous paraissent moins simples et ont une signification moins précise. Au fond, M. Ribaucour a employé la théorie des mouvements relatifs, mais sans le dire explicitement et sans utiliser toutes les ressources que présente cette théorie.

Les formules de M. Codazzi sont loin d'être les seules qui permettent une étude approfondie de la théorie des surfaces. Nous montrerons plus loin tout le parti que l'on peut tirer du beau Mémoire de Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, auquel se rattachent presque tous les travaux des géomètres allemands. Les relations qui y sont établies permettent de traiter complètement toutes les questions essentielles.

courbure de la surface. Nous allons indiquer rapidement les formules qui se rapportent à cette hypothèse.

Dans ce cas, l'équation différentielle (20) des lignes de courbure doit être privée des termes en du^2, dv^2. Il faut donc que l'on ait

$$p = q_1 = 0. \tag{25}$$

Les formules de M. Codazzi se réduisent alors aux suivantes :

$$(\mathrm{A}''')\quad \left\{\begin{aligned} r &= -\frac{1}{\mathrm{C}}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v}, & \frac{\partial p_1}{\partial u} &= -q r_1, \\ r_1 &= \frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u}, & \frac{\partial q}{\partial v} &= r p_1, \end{aligned}\right. \qquad \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = -q p_1.$$

Six des douze rotations ou translations du trièdre deviennent nulles.

On voit que l'élimination de p_1, q, r, r_1 entre les équations précédentes doit conduire à une relation différentielle entre A et C. On ne pourrait donc pas choisir arbitrairement l'élément linéaire d'une surface rapportée à ses lignes de courbure.

L'élément linéaire $d\sigma$ de la représentation sphérique prend ici la forme très simple

$$d\sigma^2 = q^2\,du^2 + p_1^2\,dv^2. \tag{26}$$

On reconnaît ainsi que les lignes de la sphère qui servent d'images aux lignes de courbure se coupent, elles aussi, à angle droit.

Appelons R le rayon de courbure principal correspondant à l'arc $\mathrm{A}\,du$, R′ l'autre rayon correspondant à l'arc $\mathrm{C}\,dv$. Les formules (19) nous donnent

$$\mathrm{R} = -\frac{\mathrm{A}}{q}, \qquad \mathrm{R}' = \frac{\mathrm{C}}{p_1}. \tag{27}$$

L'élément linéaire de la surface peut donc s'écrire

$$ds^2 = \mathrm{R}^2 q^2\,du^2 + \mathrm{R}'^2 p_1^2\,dv^2. \tag{28}$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques prend l'une

ou l'autre des deux formes

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} & A q\, du^2 - C p_1\, dv^2 = 0, \\ & \frac{\cos^2\omega}{R} + \frac{\sin^2\omega}{R'} = 0. \end{aligned}\right.$$

Notons encore qu'en introduisant R, R' à la place de A et de C dans les deux premières équations (A'''), on obtient les formules

$$(C)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{\partial R}{\partial v} = \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}(R' - R), \\ & \frac{\partial R'}{\partial u} = -\frac{1}{p_1}\frac{\partial p_1}{\partial u}(R' - R), \end{aligned}\right.$$

qui constituent les relations entre les rayons de courbure et la représentation sphérique. Comme on peut déduire des trois dernières formules (A''') la relation différentielle suivante :

$$(D)\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{p_1}\frac{\partial q}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial p_1}{\partial u}\right) + q p_1 = 0$$

entre p_1 et q, on voit qu'il sera impossible de prendre pour R et R' des fonctions quelconques de u et de v.

Le système (B'') prend ici la forme suivante :

$$(B''')\quad \left\{\begin{aligned} & dx + A\, du + qz\, du - (r\, du + r_1\, dv)y, \\ & dy + C\, dv + (r\, du + r_1\, dv)x - p_1 z\, dv, \\ & dz + p_1 y\, dv - qx\, du. \end{aligned}\right.$$

501. Les systèmes de coordonnées curvilignes que nous venons d'employer sont tous réels. Il arrive fréquemment, dans les recherches les plus importantes relatives à la théorie des surfaces, que l'on est conduit à se servir des coordonnées symétriques pour lesquelles l'élément linéaire a la forme réduite

$$(\alpha)\quad ds^2 = 4\lambda^2\, du\, dv.$$

Dans ce cas encore, il est bon d'indiquer les formules qui peuvent remplacer celles de M. Codazzi.

Voici comment nous déterminerons ici la position du trièdre (T) qui admet pour axe des z la normale à la surface. Nous prendrons, en chaque point, pour axe des x du trièdre la tangente à la

courbe

$$u - v = \text{const.},$$

et pour axe des y la tangente à la courbe orthogonale

$$u + v = \text{const.}$$

Ces hypothèses donnent déjà entre les translations les relations

$$\xi = \xi_1, \qquad \eta + \eta_1 = 0.$$

Identifions maintenant l'élément linéaire de la surface à celui qui est donné par la formule (2) du Chapitre précédent; nous aurons les relations

$$\xi^2 + \eta^2 = 0, \qquad \xi^2 - \eta^2 = 2\lambda^2.$$

Nous prendrons

$$\xi = \lambda, \qquad \eta = -\lambda i;$$

et, par conséquent, les valeurs des quatre translations seront données par les formules suivantes :

$$(30) \quad \begin{cases} \xi = \lambda, & \eta = -\lambda i, \\ \xi_1 = \lambda, & \eta_1 = +\lambda i. \end{cases}$$

Il suffit de substituer ces valeurs dans les formules du Chapitre précédent pour obtenir toutes celles qui se reportent aux coordonnées symétriques. Le système (A) nous donnera ici

$$(\mathrm{A^{IV}}) \quad \begin{cases} p + p_1 = \quad i(q_1 - q), & \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1, \\ r = -i\dfrac{\partial \log\lambda}{\partial u}, & \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - p r_1, \\ r_1 = \quad i\dfrac{\partial \log\lambda}{\partial v}, & \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1. \end{cases}$$

Les expressions données par les formules (B) deviennent

$$(\mathrm{B^{IV}}) \quad \begin{cases} dx + \lambda(du + dv) + (q\,du + q_1\,dv)z - (r\,du + r_1\,dv)y, \\ dy + i\lambda(dv - du) + (r\,du + r_1\,dv)x - (p\,du + p_1\,dv)z, \\ dz \qquad\qquad + (p\,du + p_1\,dv)y - (q\,du + q_1\,dv)x. \end{cases}$$

Les lignes asymptotiques de la surface ont pour équation différentielle

$$(31) \quad (q + ip)\,du^2 + (q_1 - ip_1)\,dv^2 + (ip_1 - ip + q + q_1)\,du\,dv = 0.$$

Le système des équations (10) (n° 488), qui définit les lignes de courbure, prend la forme

$$(32)\qquad \begin{cases} \lambda(du + dv) + \rho(q\,du + q_1\,dv) = 0, \\ i\lambda(du - dv) + \rho(p\,du + p_1\,dv) = 0, \end{cases}$$

ρ désignant toujours le rayon de courbure principal.

L'élimination de $\frac{du}{dv}$ conduit à l'équation

$$(33)\qquad \rho^2(pq_1 - qp_1) - \lambda\rho(p_1 - p - iq - iq_1) + 2i\lambda^2 = 0,$$

qui fait connaître les rayons de courbure principaux. On en déduit

$$(34)\qquad \frac{1}{RR'} = -\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial u\,\partial v},$$

formule dont on fait un fréquent usage.

L'élimination de ρ entre les équations (32) conduit à l'équation différentielle des lignes de courbure

$$(35)\qquad du^2(p - iq) + dv^2(p_1 + iq_1) = 0.$$

L'absence du terme en $du\,dv$ montre immédiatement l'orthogonalité des deux lignes de courbure.

502. En résumé, nous avons à notre disposition quatre systèmes différents de formules se rapportant, respectivement, aux coordonnées obliques, aux coordonnées rectangulaires, aux coordonnées déterminées par les lignes de courbure, aux coordonnées symétriques. Nous allons étudier quelques-unes des questions dans lesquelles ces formules jouent un rôle essentiel. Mais, avant de terminer, nous ferons une remarque générale : Dans l'un quelconque des systèmes obtenus, les expressions de r et de r_1 dépendent exclusivement de l'élément linéaire. Il suit de là que la courbure géodésique, dont l'expression contient les seules rotations r, r_1, ne change pas quand on déforme la surface. En particulier, les lignes géodésiques, pour lesquelles la courbure géodésique est nulle et dont l'équation différentielle se forme exclusivement avec l'élément linéaire de la surface, conserveront leur définition lorsqu'on passera de la surface proposée à toute autre surface applicable sur la première.

Lorsque les recherches que nous aurons à entreprendre devront s'appliquer à tous les cas, nous pourrons employer les formules du Chapitre Ier, en remarquant que ξ, ξ_1, η, η_1, r, r_1 dépendent exclusivement de l'élément linéaire dans tous les systèmes de formules, et demeurent les mêmes quand la surface se déforme en entraînant le trièdre (T).

503. Il nous reste, pour compléter tous ces développements, à indiquer comment on déterminera les différentes quantités qui figurent dans ces systèmes de formules lorsque la surface sera connue et définie; par exemple, lorsqu'on aura les expressions des coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point de la surface en fonction des paramètres u et v. Considérons le premier système de formules, celui d'où l'on peut faire dériver tous les autres et qui contient les translations ξ, η, ξ_1, η_1. E, F, G désignant les trois fonctions de Gauss, on aura d'abord

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \xi^2 + \eta^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \xi\xi_1 + \eta\eta_1, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2. \end{aligned}\right.$$

Ces trois équations permettront de déterminer, autant qu'elles peuvent l'être, les quatre translations. Toute hypothèse sur la manière dont le trièdre (T) est *attaché* à la surface donnera une relation qu'il faudra joindre aux précédentes. Nous pouvons donc considérer les translations comme connues.

Cela posé, conservons, pour déterminer les neuf cosinus qui déterminent la position du trièdre (T), toutes les notations du Livre I [1, p. 2]. La considération des déplacements suivant les courbes coordonnées nous conduira aux six équations

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} \xi a + \eta b &= \frac{\partial x}{\partial u}, \\ \xi a' + \eta b' &= \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \xi a'' + \eta b'' &= \frac{\partial z}{\partial u} \end{aligned}\right.$$

et

$$(37)' \quad \begin{cases} \xi_1 a + \eta_1 b = \dfrac{\partial x}{\partial v}, \\ \xi_1 a' + \eta_1 b' = \dfrac{\partial y}{\partial v}, \\ \xi_1 a'' + \eta_1 b'' = \dfrac{\partial z}{\partial v}, \end{cases}$$

qui feront connaître les six cosinus a, b, a', ... On trouve ainsi

$$(38) \quad \begin{cases} \Delta a = \eta_1 \dfrac{\partial x}{\partial u} - \eta \dfrac{\partial x}{\partial v}, \\ \Delta a' = \eta_1 \dfrac{\partial y}{\partial u} - \eta \dfrac{\partial y}{\partial v}, \\ \Delta a'' = \eta_1 \dfrac{\partial z}{\partial u} - \eta \dfrac{\partial z}{\partial v}; \end{cases}$$

$$(38)' \quad \begin{cases} \Delta b = - \xi_1 \dfrac{\partial x}{\partial u} + \xi \dfrac{\partial x}{\partial v}, \\ \Delta b' = - \xi_1 \dfrac{\partial y}{\partial u} + \xi \dfrac{\partial y}{\partial v}, \\ \Delta b'' = - \xi_1 \dfrac{\partial z}{\partial u} + \xi \dfrac{\partial z}{\partial v}, \end{cases}$$

où Δ désigne le déterminant $\xi\eta_1 - \eta\xi_1$ qui, d'après les formules (36), a pour valeur

$$(39) \quad \Delta = \xi\eta_1 - \eta\xi_1 = \pm\sqrt{EG - F^2}.$$

Quant aux cosinus directeurs c, c', c'' de la normale à la surface, on les déduira de leurs expressions connues [I, p. 3] en fonction des six autres. On trouve ainsi

$$(40) \quad \begin{cases} \Delta c = \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v} - \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial z}{\partial u}, \\ \Delta c' = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u}, \\ \Delta c'' = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}. \end{cases}$$

Il nous reste à déterminer les rotations. On les obtient, par

exemple, en différentiant les formules (37) et (37)', qui conduisent ainsi aux suivantes :

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{S}\, c\, d\frac{\partial x}{\partial u} &= \xi\, \mathrm{S}\, c\, da + \eta\, \mathrm{S}\, c\, db \\ &= -\xi\,(q\,du + q_1\,dv) + \eta\,(p\,du + p_1\,dv), \\ \mathrm{S}\, c\, d\frac{\partial x}{\partial v} &= \xi_1 \mathrm{S}\, c\, da + \eta_1 \mathrm{S}\, c\, db \\ &= -\xi_1(q\,du + q_1\,dv) + \eta_1(p\,du + p_1\,dv), \\ \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\, d\frac{\partial x}{\partial u} &= \xi_1\,d\xi + \eta_1\,d\eta + (\xi\eta_1 - \eta\xi_1)(r\,du + r_1\,dv). \end{aligned}\right.$$

En remplaçant c, c', c'' par leurs valeurs données plus haut et en introduisant les déterminants D, D′, D″ définis par l'identité

$$(42)\quad \mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}du^2 + 2\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}dv^2 \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}du^2 + 2\dfrac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2}dv^2 \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2 + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}dv^2 \end{vmatrix},$$

on obtiendra, par la résolution des équations précédentes, les valeurs suivantes des rotations :

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta^2(p\,du + p_1\,dv) = \xi(\mathrm{D}'\,du + \mathrm{D}''\,dv) - \xi_1(\mathrm{D}\,du + \mathrm{D}'\,dv), \\ &\Delta^2(q\,du + q_1\,dv) = \eta(\mathrm{D}'\,du + \mathrm{D}''\,dv) - \eta_1(\mathrm{D}\,du + \mathrm{D}'\,dv), \\ &\Delta\,(r\,du + r_1\,dv) = -\xi_1\,d\xi - \eta_1\,d\eta + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}dv + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)du \\ &\qquad = +\xi\,d\xi_1 + \eta\,d\eta_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}du - \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right)dv. \end{aligned}\right.$$

Nous verrons plus loin que les déterminants D, D′, D″ jouent un rôle essentiel dans la théorie de Gauss. D'après la dernière des formules précédentes, on reconnaît que les rotations r et r_1 dépendent seulement de l'élément linéaire de la surface, ce qui est conforme aux résultats déjà signalés (nº 502). Quant aux rotations p, q, p_1, q_1, elles s'expriment en fonction linéaire de D, D′,

D''. On a, en effet,

$$(44)\quad \begin{cases} \Delta^2 p = \xi D' - \xi_1 D, & \Delta^2 q = \eta D' - \eta_1 D, \\ \Delta^2 p_1 = \xi D'' - \xi_1 D', & \Delta^2 q_1 = \eta D'' - \eta_1 D', \\ \Delta r = +\xi \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} + \eta \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial v}, \\ \Delta r_1 = -\xi_1 \dfrac{\partial \xi}{\partial v} - \eta_1 \dfrac{\partial \eta}{\partial v} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial u}. \end{cases}$$

Si l'on porte les valeurs de p, q, p_1, q_1 dans la troisième des relations (5) [I, p. 49], on sera conduit à l'identité

$$(45)\quad \Delta^3(pq_1 - qp_1) = DD'' - D'^2 = \Delta^3\left(\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u}\right),$$

établissant entre D, D', D'' une relation qui dépend seulement de l'élément linéaire, et sur laquelle nous aurons à revenir quand nous ferons connaître la théorie de Gauss.

504. Pour indiquer au moins une application, supposons que la surface soit un ellipsoïde rapporté à ses lignes de courbure. On aura ici

$$(46)\quad \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{a(a-u)(a-v)}{(a-b)(a-c)}}, \\ y = \sqrt{\dfrac{b(b-u)(b-v)}{(b-a)(b-c)}}, \\ z = \sqrt{\dfrac{c(c-u)(c-v)}{(c-a)(c-b)}}, \end{cases}$$

$$(47)\quad E = \frac{u(u-v)}{f(u)}, \qquad G = \frac{v(v-u)}{f(v)},$$

$f(u)$ désignant la fonction

$$(48)\quad f(u) = 4(a-u)(b-u)(c-u).$$

Le calcul donne

$$(49)\quad \begin{cases} D = \dfrac{-4xyz(u-v)^2(a-b)(a-c)(b-c)}{f^2(u)f(v)} = -\dfrac{\sqrt{abc}(u-v)^2}{f(u)\sqrt{-f(u)f(v)}}, \\ D' = 0, \qquad D'' = \dfrac{\sqrt{abc}(u-v)^2}{f(v)\sqrt{-f(u)f(v)}}. \end{cases}$$

Supposons que l'on prenne

$$\xi_1 = 0, \qquad \eta = 0, \tag{50}$$

ce qui revient à faire coïncider les axes des x et des y du trièdre (T) avec les tangentes aux lignes coordonnées. On aura

$$\xi = \sqrt{E}, \qquad \eta_1 = \sqrt{G}, \tag{51}$$

et les formules (43) donneront

$$EG(p\,du + p_1\,dv) = \sqrt{E}\,D''\,dv,$$
$$EG(q\,du + q_1\,dv) = -\sqrt{G}\,D\,du.$$

On déduira de là

$$\left\{\begin{aligned} &p = 0, && q_1 = 0, \\ &q = \frac{\sqrt{abc}}{u}\sqrt{\frac{u-v}{v f(u)}}, && p_1 = -\frac{\sqrt{abc}}{v}\sqrt{\frac{v-u}{u f(v)}}. \end{aligned}\right. \tag{52}$$

Quant aux rotations r, r_1, elles se déduisent de l'élément linéaire par la troisième des formules (43), qui nous donne

$$r\,du + r_1\,dv = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u}\,dv - \frac{1}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial v}\,du$$

et, par suite,

$$\left\{\begin{aligned} r &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{1}{2(u-v)}\sqrt{\frac{-u f(v)}{v f(u)}}, \\ r_1 &= \frac{1}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{1}{2(u-v)}\sqrt{\frac{v f(u)}{-u f(v)}}. \end{aligned}\right. \tag{53}$$

Les formules (27) nous donnent, par exemple, pour les rayons de courbure principaux, les valeurs suivantes

$$R = -\frac{\sqrt{E}}{q} = -\frac{u^{\frac{3}{2}} v^{\frac{1}{2}}}{(abc)^{\frac{1}{2}}}, \qquad R' = \frac{\sqrt{G}}{p_1} = -\frac{u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{3}{2}}}{(abc)^{\frac{1}{2}}}, \tag{54}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{R}{R'^3} = \frac{abc}{v^4}, \qquad \frac{R'}{R^3} = \frac{abc}{u^4}. \tag{55}$$

Donc, *sur chaque ligne de courbure, le rayon principal correspondant est proportionnel au cube de l'autre rayon de courbure principal.*

Il résulte des formules (54) que l'on a

$$RR' = \frac{u^2 v^2}{abc}. \tag{56}$$

Par suite, les lignes pour lesquelles la courbure totale demeure constante sont définies par l'équation

$$uv = \text{const.}$$

Or, si l'on désigne par δ la distance du centre de l'ellipsoïde au plan tangent en un point de coordonnées u, v, un calcul facile donnera

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{uv}{abc} = \sqrt{\frac{RR'}{abc}}. \tag{57}$$

Il suit de là que les courbes considérées sont celles que Poinsot a désignées sous le nom de *polhodies* et qui sont le lieu des points pour lesquels la distance du centre de l'ellipsoïde au plan tangent conserve une valeur constante.

Des considérations de Géométrie tirées de la théorie des diamètres conjugués, et auxquelles le lecteur suppléera aisément, mettent en évidence une remarquable propriété de ces courbes :

Si, par chaque tangente à une polhodie, on mène un plan normal à l'ellipsoïde, la section de l'ellipsoïde par ce plan aura un de ses sommets au point de contact de la tangente.

En d'autres termes, *les polhodies sont des courbes telles que chaque section normale tangente à la courbe en un de ses points est surosculée en ce point par un cercle.*

Nous retrouverons plus loin cette propriété au n° 510.

Avant de commencer l'étude détaillée des lignes tracées sur les surfaces, nous allons donner différents Tableaux contenant les systèmes de formules que nous avons obtenus dans ce Chapitre et dans le précédent.

TABLEAU I (Chapitre I).

Rotations $p, q, r; p_1, q_1, r_1$; translations $\xi, \eta, 0; \xi_1, \eta_1, 0$:

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1, && \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta r_1 - r \eta_1, \\ &\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - p r_1, && \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = r \xi_1 - \xi r_1, \\ &\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1, && p\eta_1 - p_1\eta = q\xi_1 - q_1\xi; \end{aligned}\right.$$

$$(B)\quad \left\{\begin{aligned} &dx + \xi\, du + \xi_1\, dv + (q\, du + q_1\, dv) z - (r\, du + r_1\, dv) y, \\ &dy + \eta\, du + \eta_1\, dv + (r\, du + r_1\, dv) x - (p\, du + p_1\, dv) z, \\ &dz \qquad\qquad\qquad + (p\, du + p_1\, dv) y - (q\, du + q_1\, dv) x. \end{aligned}\right.$$

Courbe tracée sur la surface :

$$(1)\qquad ds \cos\omega = \xi\, du + \xi_1\, dv, \qquad ds \sin\omega = \eta\, du + \eta_1\, dv.$$

Image sphérique de la courbe :

$$(2)\qquad d\sigma \cos\theta = q\, du + q_1\, dv, \qquad d\sigma \sin\theta = -p\, du - p_1\, dv,$$

$$(3)\qquad d\sigma^2 = (p\, du + p_1\, dv)^2 + (q\, du + q_1\, dv)^2.$$

Condition pour que deux directions soient conjuguées :

$$(4)\quad (p\, du + p_1\, dv)(\eta\, \delta u + \eta_1\, \delta v) - (q\, du + q_1\, dv)(\xi\, \delta u + \xi_1\, \delta v) = 0.$$

Lignes asymptotiques :

$$(5)\quad (p\eta - q\xi)\, du^2 + (p_1\eta_1 - q_1\xi_1)\, dv^2 + (p\eta_1 + p_1\eta - q\xi_1 - q_1\xi)\, du\, dv = 0,$$

$$(6)\qquad (p\, du + p_1\, dv) \sin\omega - (q\, du + q_1\, dv) \cos\omega = 0.$$

Lignes de courbure :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\xi\, du + \xi_1\, dv + \rho(q\, du + q_1\, dv) = 0, \\ &\eta\, du + \eta_1\, dv - \rho(p\, du + p_1\, dv) = 0. \end{aligned}\right.$$

Équation différentielle de ces lignes :

$$(8)\quad (p\, du + p_1\, dv)(\xi\, du + \xi_1\, dv) + (q\, du + q_1\, dv)(\eta\, du + \eta_1\, dv) = 0,$$

$$(9)\qquad (p\, du + p_1\, dv) \cos\omega + (q\, du + q_1\, dv) \sin\omega = 0.$$

Équation aux rayons de courbure principaux :

$$(10)\quad \rho^2(pq_1 - qp_1) + \rho(q\eta_1 - q_1\eta + p\xi_1 - p_1\xi) + \xi\eta_1 - \eta\xi_1 = 0.$$

Courbure totale :

$$(11)\qquad \frac{\xi\eta_1 - \eta\xi_1}{RR'} = pq_1 - qp_1 = \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u}.$$

TABLEAU II (Chapitre I).

Courbure et torsion d'une ligne tracée sur la surface; ξ', η', ζ', angles de la normale principale; λ', μ', ν', angles de la binormale avec les axes du trièdre (T) :

$$(1)\quad \begin{cases} \cos\xi' = -\sin\omega\sin\varpi, & \cos\eta' = \cos\omega\sin\varpi, & \cos\zeta' = \cos\varpi, \\ \cos\lambda' = \sin\omega\cos\varpi, & \cos\mu' = -\cos\omega\cos\varpi, & \cos\nu' = \sin\varpi, \end{cases}$$

$$(2)\quad \frac{\sin\varpi}{\rho}\,ds = d\omega + r\,du + r_1\,dv,$$

$$(3)\quad \frac{\cos\varpi}{\rho}\,ds = \sin\omega(p\,du + p_1\,dv) - \cos\omega(q\,du + q_1\,dv),$$

$$(4)\quad \frac{1}{\tau} - \frac{d\varpi}{ds} = -\frac{p\,du + p_1\,dv}{ds}\cos\omega - \frac{q\,du + q_1\,dv}{ds}\sin\omega = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right),$$

$$(5)\quad \begin{cases} -\dfrac{\cos\varpi}{\rho^2}\dfrac{d\rho}{ds} + \dfrac{\sin\varpi}{\rho}\left(\dfrac{2}{\tau} - 3\dfrac{d\varpi}{ds}\right) = \mathrm{K} \\ = \left[\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\cos\varpi}{\rho}\right) - r\dfrac{\partial}{\partial\omega}\left(\dfrac{\cos\varpi}{\rho}\right)\right]\dfrac{du}{ds} \\ \quad + \left[\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\cos\varpi}{\rho}\right) - r_1\dfrac{\partial}{\partial\omega}\left(\dfrac{\cos\varpi}{\rho}\right)\right]\dfrac{dv}{ds}. \end{cases}$$

Centre de la sphère osculatrice (x_0, y_0, z_0) :

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{x_0}{-\sin\omega} = \dfrac{y_0}{\cos\omega} = \rho\sin\varpi + \tau\cos\varpi\dfrac{d\rho}{ds}, \\ z_0 = \rho\cos\varpi - \tau\dfrac{d\rho}{ds}\sin\varpi. \end{cases}$$

Centre de courbure normale (x_1, y_1, z_1) :

$$(7)\quad x_1 = y_1 = 0, \qquad z_1 = \frac{\rho}{\cos\varpi}.$$

Centre de courbure géodésique (x_2, y_2, z_2) :

$$(8)\quad x_2 = -\frac{\rho\sin\omega}{\sin\varpi}, \qquad y_2 = \frac{\rho\cos\omega}{\sin\varpi}, \qquad z_2 = 0.$$

Centre de courbure de la courbe (x_3, y_3, z_3) :

$$(9)\quad x_3 = -\rho\sin\omega\sin\varpi, \qquad y_3 = \rho\cos\omega\sin\varpi, \qquad z_3 = \rho\cos\varpi.$$

TABLEAU III (Chapitre II).

(1) $$ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2 + 2AC \cos\alpha \, du \, dv,$$

(2) $$n - m = \alpha,$$

(3) $$\xi = A\cos m, \quad \eta = A\sin m, \quad \xi_1 = C\cos n, \quad \eta_1 = C\sin n,$$

(A′) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = qr_1 - rq_1, \quad r = -\frac{\partial n}{\partial u} - \frac{1}{C\sin\alpha}\left(\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial C}{\partial u}\cos\alpha\right),\\ &\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = rp_1 - pr_1, \quad r_1 = -\frac{\partial m}{\partial v} + \frac{1}{A\sin\alpha}\left(\frac{\partial C}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v}\cos\alpha\right),\\ &\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = pq_1 - qp_1, \quad A(p_1\sin m - q_1\cos m) = C(p\sin n - q\cos n).\end{aligned}\right.$$

(B′) $$\left\{\begin{aligned} &dx + A\cos m\, du + C\cos n\, dv + (q\, du + q_1 dv)z - (r\, du + r_1 dv)y,\\ &dy + A\sin m\, du + C\sin n\, dv + (r\, du + r_1 dv)x - (p\, du + p_1 dv)z,\\ &dz \qquad\qquad + (p\, du + p_1 dv)y - (q\, du + q_1 dv)x,\end{aligned}\right.$$

Ligne tracée sur la surface :

(4) $$ds\cos\omega = A\cos m\, du + C\cos n\, dv, \qquad ds\sin\omega = A\sin m\, du + C\sin n\, dv.$$

Angle de deux directions :

(5) $$\left\{\begin{aligned} &ds\,\delta s\cos(\omega - \omega') = A^2 du\,\delta u + AC\cos\alpha(du\,\delta v + dv\,\delta u) + C^2 dv\,\delta v,\\ &ds\,\delta s\sin(\omega - \omega') = AC\sin\alpha(dv\,\delta u - du\,\delta v).\end{aligned}\right.$$

Directions conjuguées :

(6) $$\left\{\begin{aligned} &A(q\cos m - p\sin m)\, du\,\delta u + C(q_1\cos n - p_1\sin n)\, dv\,\delta v\\ &\quad + A(q_1\cos m - p_1\sin m)\, du\,\delta v + C(q\cos n - p\sin n)\, dv\,\delta u = 0.\end{aligned}\right.$$

Lignes asymptotiques :

(7) $$\left\{\begin{aligned} &A(q\cos m - p\sin m)\, du^2\\ &\quad + C(q_1\cos n - p_1\sin n)\, dv^2 + 2A(q_1\cos m - p_1\sin m)\, du\, dv = 0.\end{aligned}\right.$$

Lignes de courbure :

(8) $$\left\{\begin{aligned} &A\cos m\, du + C\cos n\, dv + \rho(q\, du + q_1 dv) = 0,\\ &A\sin m\, du + C\sin n\, dv - \rho(p\, du + p_1 dv) = 0.\end{aligned}\right.$$

Équation différentielle :

(9) $$\left\{\begin{aligned} &A(p\cos m + q\sin m)\, du^2 + C(p_1\cos n + q_1\sin n)\, dv^2\\ &\quad + [A(p_1\cos m + q_1\sin m) + C(p\cos n + q\sin n)]\, du\, dv = 0\end{aligned}\right.$$

Rayons de courbure principaux :

(10) $$\left\{\begin{aligned} &\rho^2(pq_1 - qp_1)\\ &\quad - \rho[A(p_1\cos m + q_1\sin m) - C(p\cos n + q\sin n)] + AC\sin\alpha = 0,\end{aligned}\right.$$

(11) $$\frac{AC\sin\alpha}{RR'} = -\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial C}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v}\cos\alpha}{A\sin\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial C}{\partial u}\cos\alpha}{C\sin\alpha}\right).$$

TABLEAU IV (Chapitre II).

Coordonnées rectangulaires quelconques :

(1) $\xi = A, \qquad \eta = 0, \qquad \xi_1 = 0, \qquad \eta_1 = C, \qquad n = \alpha = \frac{\pi}{2}, \qquad m = 0,$

(A) $$\left\{\begin{aligned} &A q_1 + C p = 0, && \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1, \\ &r = -\frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}, && \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - p r_1, \\ &r_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}, && \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1, \end{aligned}\right.$$

(B) $$\left\{\begin{aligned} &dx + A\,du + (q\,du + q_1\,dv)z - (r\,du + r_1\,dv)y, \\ &dy + C\,dv + (r\,du + r_1\,dv)x - (p\,du + p_1\,dv)z, \\ &dz \qquad\quad + (p\,du + p_1\,dv)y - (q\,du + q_1\,dv)x. \end{aligned}\right.$$

Ligne tracée sur la surface :

(2) $$ds \cos\omega = A\,du, \qquad ds \sin\omega = C\,dv.$$

Directions conjuguées :

(3) $$A q\,du\,\delta u - C p_1\,dv\,\delta v + A q_1(du\,\delta v + dv\,\delta u) = 0.$$

Lignes asymptotiques :

(4) $$A q\,du^2 - C p_1\,dv^2 + (A q_1 - C p)\,du\,dv = 0.$$

Lignes de courbure :

(5) $$\left\{\begin{aligned} &A\,du + \rho(q\,du + q_1\,dv) = 0, \\ &C\,dv - \rho(p\,du + p_1\,dv) = 0. \end{aligned}\right.$$

Équation différentielle :

(6) $$A p\,du^2 + C q_1\,dv^2 + (C q + A p_1)\,du\,dv = 0.$$

Rayons de courbure principaux :

(7) $$\rho^2\left(\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u}\right) - \rho(A p_1 - C q) + AC = 0,$$

(8) $$\frac{AC}{RR'} = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}\right).$$

(9) $$AC\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = A p_1 - C q$$

TABLEAU V (Chapitre II).

Système de coordonnées formé par les lignes de courbure :

(1) $\xi = A, \quad \eta = 0, \quad \xi_1 = 0, \quad \eta_1 = C, \quad p = 0, \quad q_1 = 0,$

(A) $$\left\{\begin{aligned} & r = -\frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}, && \frac{\partial p_1}{\partial u} = -q r_1 \\ & r_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}, && \frac{\partial q}{\partial v} = r p_1, \\ & \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = -q p_1, && \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial p_1}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{p_1}\frac{\partial q}{\partial v}\right) + q p_1 = 0. \end{aligned}\right.$$

Directions conjuguées :

(2) $$A q\, du\, \delta u - C p_1\, dv\, \delta v = 0.$$

Lignes asymptotiques :

(3) $$A q\, du^2 - C p_1\, dv^2 = 0, \qquad \frac{\cos^2\omega}{R} + \frac{\sin^2\omega}{R'} = 0.$$

Rayons de courbure principaux :

(4) $$R = -\frac{A}{q}, \qquad R' = \frac{C}{p_1},$$

(5) $$\frac{\partial R}{\partial v} = (R' - R)\frac{\partial \log q}{\partial v}, \qquad \frac{\partial R'}{\partial u} = -(R' - R)\frac{\partial \log p_1}{\partial u}.$$

Ligne tracée sur la surface :

$$\cos\omega = \frac{A\, du}{ds}, \qquad \sin\omega = \frac{C\, dv}{ds},$$

(6) $$\frac{\cos\varpi}{\rho} = \frac{\cos^2\omega}{R} + \frac{\sin^2\omega}{R'},$$

(7) $$\frac{1}{\tau} - \frac{d\varpi}{ds} = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\sin\omega\cos\omega,$$

(8) $$\left\{\begin{aligned} & -\frac{\cos\varpi}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds} + \frac{\sin\varpi}{\rho}\left(\frac{2}{\tau} - 3\frac{d\varpi}{ds}\right) \\ & = -q^2\frac{\partial R}{\partial u}\frac{du^3}{ds^3} - 3q^2\frac{\partial R}{\partial v}\frac{du^2}{ds^2}\frac{dv}{ds} - 3p_1^2\frac{\partial R'}{\partial u}\frac{du}{ds}\frac{dv^2}{ds^2} - p_1^2\frac{\partial R'}{\partial v}\frac{dv^3}{ds^3}. \end{aligned}\right.$$

TABLEAU VI (Chapitre II).

Coordonnées symétriques :

(1) $$ds^2 = 4\lambda^2 du\, dv,$$

(2) $$\xi = \lambda, \qquad \eta = -i\lambda, \qquad \xi_1 = \lambda, \qquad \eta_1 = i\lambda,$$

(A) $$\left\{\begin{aligned} & p + p_1 = i(q_1 - q), && \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = qr_1 - rq_1, \\ & r = -i\frac{\partial \log\lambda}{\partial u}, && \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = rp_1 - pr_1, \\ & r_1 = i\frac{\partial \log\lambda}{\partial v}, && \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = pq_1 - qp_1, \end{aligned}\right.$$

(B) $$\left\{\begin{aligned} & dx + \lambda(du + dv) + (q\, du + q_1 dv)z - (r\, du + r_1 dv)y, \\ & dy + i\lambda(dv - du) + (r\, du + r_1 dv)x - (p\, du + p_1 dv)z, \\ & dz \qquad\qquad\qquad + (p\, du + p_1 dv)y - (q\, du + q_1 dv)x. \end{aligned}\right.$$

Directions conjuguées :

(3) $$(q + ip)\, du\, \delta u + (q_1 - ip_1)\, dv\, \delta v + (q - ip)(du\, \delta v + dv\, \delta u) = 0.$$

Lignes asymptotiques :

(4) $$(q + ip)\, du^2 + (q_1 - ip_1)\, dv^2 + 2(q - ip)\, du\, dv = 0.$$

Lignes de courbure :

(5) $$\left\{\begin{aligned} & \lambda(du + dv) + \rho(q\, du + q_1 dv) = 0, \\ & i\lambda(du - dv) + \rho(p\, du + p_1 dv) = 0. \end{aligned}\right.$$

Équation différentielle :

(6) $$(p - iq)\, du^2 + (p_1 + iq_1)\, dv^2 = 0.$$

Rayons de courbure principaux :

(7) $$\rho^2(pq_1 - qp_1) - \lambda\rho(p_1 - p - iq - iq_1) + 2i\lambda^2 = 0,$$

(8) $$\frac{1}{RR'} = -\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial u\, \partial v}.$$

Courbe tracée sur la surface :

(9) $$e^{i\omega} = \frac{2\lambda\, du}{ds}, \qquad e^{-i\omega} = \frac{2\lambda\, dv}{ds},$$

(10) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\sin\varpi}{\rho} ds &= d\omega + r\, du + r_1 dv = d\omega - i\left(\frac{\partial \log\lambda}{\partial u} du - \frac{\partial \log\lambda}{\partial v} dv\right) \\ &= \frac{i}{2}\left[d \log\frac{dv}{du} - 2\frac{\partial \log\lambda}{\partial u} du + 2\frac{\partial \log\lambda}{\partial v} dv\right]. \end{aligned}\right.$$

M. Bertrand qui, du reste, a établi directement la formule précédente.

Cette formule nous montre que $d\varpi$ sera nul pour les deux directions principales. En général, les valeurs de $d\varpi$ correspondantes à la même valeur de ds et à deux directions rectangulaires seront égales et de signes contraires.

506. On peut substituer à l'angle $d\varpi$ le moment des deux normales en M et en M'. Imaginons une force de longueur égale à l'unité dirigée suivant la normale en M'. Le moment $\mathfrak{M}$ de cette force par rapport à la normale en M sera égal à $\delta\psi$, δ désignant la plus courte distance et ψ l'angle des deux droites. Or, si l'on fait glisser cette force sur la normale en M' jusqu'à ce que son point d'application arrive en M', on pourra la décomposer en deux autres forces, dont une sera dirigée suivant la projection de la normale en M' sur le plan normal en M qui contient M', et dont l'autre sera perpendiculaire à ce plan. Le moment de la force sera égal à celui de cette seconde composante, qui est égale à $d\varpi$, et dont la distance à la normale en M est évidemment ds, en négligeant dans les deux évaluations les infiniment petits du second ordre. On a donc

$$\mathfrak{M} = \delta\psi = ds\,d\varpi = ds^2\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)\sin\omega\cos\omega.$$

Il est aisé d'ailleurs de vérifier que cette valeur de $\mathfrak{M}$ ne change pas quand on passe à toute surface parallèle; car, en remplaçant $\sin\omega$, $\cos\omega$ par leurs valeurs, on trouve

$$\mathfrak{M} = (R' - R)p_1 q\,du\,dv;$$

et les quantités p_1, q, $R' - R$ ne changent pas évidemment (n° 500) dans le passage à la surface parallèle.

Si l'on voulait connaître l'angle ψ des normales en M et en M', on aurait évidemment

$$\psi^2 = d\varpi^2 + \left(\frac{ds\cos\varpi}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{\cos^2\omega}{R'^2} + \frac{\sin^2\omega}{R^2}\right)ds^2.$$

507. La formule de M. Bonnet conduit à d'autres conséquences;

en particulier, elle a donné lieu à l'introduction d'un nouvel élément relatif aux courbes tracées sur une surface.

La fonction $\frac{1}{\tau} - \frac{d\varpi}{ds}$ relative à un point d'une courbe (C) demeurant la même pour toutes les courbes tangentes à la courbe (C) en ce point, considérons, en particulier, la ligne géodésique tangente. Pour cette ligne on a, par définition,

$$\varpi = 0,$$

et la fonction précédente se réduit à la torsion. Ainsi

$$\frac{1}{\tau} - \frac{d\varpi}{ds}$$

représente, en un point quelconque d'une courbe (C), la torsion de la ligne géodésique tangente. M. Bonnet lui a donné le nom de *torsion géodésique*. Cette définition est consacrée bien qu'elle ait l'inconvénient d'éveiller l'idée d'une analogie qui n'existe pas avec la courbure géodésique. La torsion géodésique ne se conserve pas quand on déforme une surface.

Quoi qu'il en soit, une fois que l'on a introduit cette nouvelle notion, il est très aisé de donner des expressions géométriques des six rotations p, q, r, p_1, q_1, r_1.

Désignons par $\frac{1}{\rho_{nu}}, \frac{1}{\rho_{gu}}, \frac{1}{t_u}$ les courbures normale et géodésique et la torsion géodésique de l'arc $A\,du$ et désignons de même par $\frac{1}{\rho_{nv}}, \frac{1}{\rho_{gv}}, \frac{1}{t_v}$ les éléments analogues relatifs à l'arc $C\,dv$.

Les formules précédemment établies nous donnent

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{A}{\rho_{nu}} = p\sin m - q\cos m, & \dfrac{C}{\rho_{nv}} = p_1 \sin n - q_1 \cos n, \\ \dfrac{A}{\rho_{gu}} = \dfrac{\partial m}{\partial u} + r, & \dfrac{C}{\rho_{gv}} = \dfrac{\partial n}{\partial v} + r_1, \\ \dfrac{A}{t_u} = -p\cos m - q\sin m; & \dfrac{C}{t_v} = -p_1\cos n - q_1 \sin n. \end{cases}$$

Si les coordonnées curvilignes sont rectangulaires, on fera

$n = \frac{\pi}{2}$, $m = 0$, et les formules précédentes deviendront

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{A}{\rho_{nu}} = -q, & \dfrac{C}{\rho_{nv}} = \quad p_1, \\ \dfrac{A}{\rho_{gu}} = \quad r, & \dfrac{C}{\rho_{gv}} = \quad r_1, \\ \dfrac{A}{t_u} = -p; & \dfrac{C}{t_v} = -q_1. \end{cases}$$

Nous avons ainsi la définition et l'interprétation géométrique des six rotations. On sait que M. O. Bonnet, dans sa belle démonstration des formules de M. Codazzi, a introduit ces six quantités sans les considérer comme des rotations, mais en s'appuyant uniquement sur leur définition géométrique, telle qu'elle résulte des formules précédentes.

508. Dans le cas des coordonnées obliques, on pourrait introduire, au lieu des six rotations, les expressions des six courbures absolument comme dans le cas des coordonnées rectangulaires et poser

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{A}{\rho_{nu}} = p \sin m - q \cos m = -Q, \\ \dfrac{A}{\rho_{gu}} = \dfrac{\partial m}{\partial u} + r = R - \dfrac{\partial \alpha}{\partial u}, \\ \dfrac{A}{t_u} = -p \cos m - q \sin m = -P; \\ \dfrac{C}{\rho_{nv}} = p_1 \sin n - q_1 \cos n = P_1, \\ \dfrac{C}{\rho_{gv}} = \dfrac{\partial n}{\partial v} + r_1 = R_1 + \dfrac{\partial \alpha}{\partial v}, \\ \dfrac{C}{t_v} = -p_1 \cos n - q_1 \sin n = -Q_1. \end{cases}$$

On déduit de là

$$(9)\quad \begin{cases} p = P \cos m - Q \sin m, & p_1 = \quad P_1 \sin n + Q_1 \cos n, \\ q = P \sin m + Q \cos m, & q_1 = -P_1 \cos n + Q_1 \sin n, \\ r = R - \dfrac{\partial n}{\partial u}, & r_1 = \quad R_1 - \dfrac{\partial m}{\partial v}, \end{cases}$$

et, en portant ces valeurs dans les formules (A′) [p. 363], on obtiendra le système

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
& A(P_1\cos\alpha - Q_1\sin\alpha) = C(P\sin\alpha - Q\cos\alpha),\\
& R = -\frac{1}{C\sin\alpha}\left(\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial C}{\partial u}\cos\alpha\right), \qquad R_1 = \frac{1}{A\sin\alpha}\left(\frac{\partial C}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v}\cos\alpha\right),\\
& \frac{\partial P}{\partial v} - QR_1 = \sin\alpha\left(\frac{\partial P_1}{\partial u} - RQ_1\right) + \cos\alpha\left(\frac{\partial Q_1}{\partial u} + RP_1\right),\\
& \frac{\partial Q}{\partial v} + RP_1 = \sin\alpha\left(\frac{\partial Q_1}{\partial u} + RP_1\right) - \cos\alpha\left(\frac{\partial P_1}{\partial u} - RQ_1\right),\\
& \frac{\partial R}{\partial v} - \frac{\partial R_1}{\partial u} = \frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v} - (PP_1 + QQ_1)\cos\alpha + (PQ_1 - QP_1)\sin\alpha.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces équations, qui coïncident, aux notations près, avec celles que M. Codazzi a données à la fin de son Mémoire, sont évidemment plus compliquées que les formules (A). Ce fait paraît indiquer que l'utilité des formules de M. Codazzi tient surtout à ce que les six éléments géométriques qui y figurent peuvent être considérés comme formant un système de rotations, ce qui n'a plus lieu dans le cas des coordonnées obliques.

509. M. Bonnet a fait remarquer que sa formule met immédiatement en évidence un théorème important. En effet, d'après cette formule, les seules courbes, passant par un point de la surface, dont la torsion géodésique soit nulle en ce point sont celles qui admettent pour tangentes l'une des directions principales de ce point. Les lignes de courbure sont donc caractérisées par cette propriété que la torsion géodésique est nulle en chacun de leurs points. Ce théorème est quelquefois attribué à Lancret, bien que ce géomètre ne l'ait jamais énoncé. Il est dans les rapports les plus étroits avec les belles propositions que Joachimsthal a données relativement aux lignes de courbure planes ou sphériques, et que nous allons exposer rapidement.

Quand deux surfaces se coupent sous un angle constant, la ligne d'intersection ne peut être ligne de courbure de l'une des surfaces sans l'être aussi de l'autre. En effet, ϖ et ϖ' désignant les angles que le plan osculateur de la ligne d'intersection fait avec les normales aux deux surfaces, il est clair que l'angle des deux normales est $\varpi - \varpi'$. Si cet angle est constant, on aura,

en chaque point de l'intersection,

$$\frac{1}{\tau} - \frac{d\varpi}{ds} = \frac{1}{\tau} - \frac{d\varpi'}{ds}.$$

Cette égalité montre que la torsion géodésique de la courbe a la même valeur quand on la rapporte successivement aux deux surfaces. Elle ne peut donc être nulle pour l'une des surfaces sans l'être aussi pour l'autre.

Réciproquement, si l'intersection de deux surfaces est une ligne de courbure pour les deux surfaces, elles se coupent sous un angle constant; car on a alors

$$\frac{1}{\tau} - \frac{d\varpi}{ds} = 0 = \frac{1}{\tau} - \frac{d\varpi'}{ds}, \qquad \frac{d\varpi}{ds} = \frac{d\varpi'}{ds},$$

et, par conséquent, l'angle $\varpi - \varpi'$ est constant.

Dans le cas où l'une des surfaces est un plan ou une sphère, ces propositions donnent les corollaires suivants :

Si un plan ou une sphère coupe une surface sous un angle constant, l'intersection est ligne de courbure de la surface.

Si une ligne de courbure est plane ou sphérique, le plan ou la sphère qui contient la courbe coupe la surface sous un angle constant.

Il suffit, pour rattacher ces propositions aux précédentes, de remarquer que toute ligne plane ou sphérique est ligne de courbure du plan ou de la sphère sur laquelle elle est tracée.

Au reste, toutes ces propositions ont leur véritable origine dans la théorie des développées des courbes gauches. Nous avons vu, en effet [I, p. 18], que toute normale d'une courbe gauche qui enveloppe une développée fait avec le plan osculateur un angle V défini par la formule

$$dV = \frac{ds}{\tau}.$$

Étant donnée une courbe tracée sur une surface, pour qu'elle soit une ligne de courbure, c'est-à-dire pour que la normale à la surface en tous ses points enveloppe une développée de la courbe, il sera nécessaire et suffisant que la relation précédente soit véri-

fiée quand on y remplace V par ϖ, ce qui est le théorème énoncé plus haut.

On démontrera de même les théorèmes de Joachimsthal. Par exemple, si deux surfaces se coupent suivant une ligne de courbure commune, les normales aux deux surfaces en chaque point de cette courbe enveloppent deux développées distinctes; et, par suite, elles se coupent sous un angle constant. Les propositions réciproques s'établissent par des considérations analogues.

Le théorème de Joachimsthal conduit à une conséquence que nous avons déjà signalée [I, p. 316], sans la démontrer. *Toutes les fois qu'une surface admet une ligne de courbure plane, la représentation sphérique de cette ligne de courbure est un cercle dont le plan est parallèle à celui qui contient la ligne de courbure.* En effet, la normale à la surface en tous les points de la ligne de courbure fait alors un angle constant α avec la perpendiculaire au plan de cette ligne. Par suite, la représentation sphérique de la ligne de courbure sera le lieu des extrémités des rayons de la sphère qui font l'angle α avec cette perpendiculaire: ce sera un grand cercle si le plan de la ligne de courbure est normal à la surface et un petit cercle si l'angle α n'est pas droit; mais, dans l'un et l'autre cas, le plan de ce cercle sera évidemment parallèle à celui de la ligne de courbure.

Réciproquement, si la représentation sphérique d'une ligne de courbure est formée par un cercle de la sphère, la tangente en tous les points de cette ligne sera parallèle au plan du cercle; et, par conséquent, la ligne elle-même sera située dans un plan parallèle au plan du cercle.

510. Après avoir étudié la formule de M. O. Bonnet, nous dirons quelques mots de celle de M. Laguerre. Si l'on rapporte la surface au système de coordonnées formé par les lignes de courbure, elle prend la forme

$$-\frac{\cos\varpi}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds}+\frac{\sin\varpi}{\rho}\left(\frac{2}{\tau}-3\frac{d\varpi}{ds}\right)=-q^2\frac{\partial R}{\partial u}\frac{du^3}{ds^3}-3q^2\frac{\partial R}{\partial v}\frac{du^2\,dv}{ds^3}$$
$$-3p_1^2\frac{\partial R'}{\partial u}\frac{du\,dv^2}{ds^3}-p_1^2\frac{\partial R'}{\partial v}\frac{dv^3}{ds^3}.$$

Il en résulte que le produit du premier membre par ds^3 demeure

constant lorsqu'on passe de la surface à l'une quelconque des surfaces parallèles; il suffit, en effet, pour effectuer ce changement, d'augmenter R et R' d'une même constante, sans changer q et p_1.

Si l'on applique la formule à une section normale de la surface, on a

$$\varpi = 0,$$

et le premier membre se réduit à $\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds}$. Il suit de là que l'équation différentielle du premier ordre et du troisième degré

$$(11) \qquad q^2 \frac{\partial R}{\partial u} du^3 + 3q^2 \frac{\partial R}{\partial v} du^2 dv + 3p_1^2 \frac{\partial R'}{\partial u} du\, dv^2 + p_1^2 \frac{\partial R'}{\partial v} dv^3 = 0$$

définit les courbes tracées sur la surface, et *pour lesquelles la section normale de la surface tangente à la courbe en un quelconque de ses points est surosculée par un cercle.*

Ces lignes ont été considérées en premier lieu par M. de la Gournerie (1). Il résulte de leur équation différentielle qu'elles se conservent lorsqu'on passe d'une surface à la surface parallèle. Cette remarque a été faite par M. Ribaucour (2). On les détermine aisément dans les surfaces du second degré; elles se réduisent alors aux deux systèmes de génératrices rectilignes et aux courbes sur lesquelles la courbure totale de la surface demeure constante. On peut rattacher leur théorie à celle du contact d'une surface avec un cylindre de révolution. Mais cette étude trouvera place ailleurs.

511. La formule de M. Laguerre permet de résoudre une question très intéressante, sur laquelle M. Bonnet a, le premier, appelé l'attention.

Considérons une courbe (C) tracée sur une surface et supposons

---

(1) De la Gournerie, *Étude sur la courbure des surfaces* (*Journal de Liouville*, 1re série, t. XX, p. 145; 1855).

(2) Ribaucour, *Propriétés de lignes tracées sur les surfaces* (*Comptes rendus*, t. LXXX, p. 642; 1875).

qu'elle soit tangente en un de ses points M à une des lignes asymptotiques qui passent en M. Alors nous avons

$$\frac{\cos\varpi}{\rho} = 0$$

et, par conséquent, si $\cos\varpi$ est différent de zéro, c'est-à-dire si le plan osculateur ne coïncide pas avec le plan tangent à la surface, ρ est infini. C'est ce qui arrive, par exemple, pour une section plane dont le plan passe par une des tangentes asymptotiques et ne se confond pas avec le plan tangent.

Mais, si le plan osculateur de la courbe se confond avec le plan tangent à la surface, on a

$$\cos\varpi = 0,$$

et ρ peut avoir une valeur quelconque. La construction géométrique que l'on déduit du théorème de Meusnier tombe également en défaut, et conduit aussi à une indétermination.

M. Bonnet, à qui l'on doit la remarque précédente, a donné pour ce cas spécial une formule que l'on peut rattacher aisément à celle qui a été démontrée par M. Laguerre.

Désignons par $\frac{1}{\tau}$, $\frac{1}{\rho}$ la torsion et la courbure de la courbe considérée, par $\frac{1}{\tau_0}$, $\frac{1}{\rho_0}$ les mêmes quantités relatives à la ligne asymptotique tangente. Nous avons vu (n^{os} **492** et **493**) que les deux fonctions

$$\frac{1}{\tau} - \frac{d\varpi}{ds} \quad \text{et} \quad -\frac{\cos\varpi}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds} + \frac{\sin\varpi}{\rho}\left(\frac{2}{\tau} - 3\frac{d\varpi}{ds}\right)$$

ont les mêmes valeurs si on les calcule successivement pour deux courbes tangentes au même point. Ici l'angle ϖ est égal à un quadrant aussi bien pour la courbe considérée que pour la ligne asymptotique; mais $\frac{d\varpi}{ds}$, qui est nul en chaque point de la ligne asymptotique, n'est pas nul nécessairement pour la courbe considérée. On a donc

$$(12) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\tau} - \frac{d\varpi}{ds} = \frac{1}{\tau_0}, \\ &\frac{1}{\rho}\left(\frac{2}{\tau} - 3\frac{d\varpi}{ds}\right) = \frac{2}{\rho_0\tau_0}, \end{aligned}\right.$$

d'où, en éliminant $\frac{d\varpi}{ds}$,

$$\frac{1}{\tau} - \frac{3}{\tau_0} = - \frac{2\rho}{\tau_0 \rho_0}. \tag{13}$$

Cette équation fera connaître ρ quand τ sera donné.

Supposons, par exemple, que nous voulions déterminer le rayon de courbure de la section par le plan tangent. Cette section a deux branches passant au point de contact. On aura, pour chacune d'elles,

$$\tau = \infty$$

et, par conséquent (¹),

$$\rho = \tfrac{3}{2}\rho_0.$$

Mais, pour que les formules précédentes soient réellement utiles, il faut qu'on puisse déterminer ρ_0 et τ_0. Voici comment on y parvient.

512. Dans le cas d'une ligne asymptotique, on a, d'après la formule (22) [p. 357],

$$-\frac{1}{\tau_0} = \frac{p\,du + p_1\,dv}{ds}\cos\omega + \frac{q\,du + q_1\,dv}{ds}\sin\omega.$$

D'ailleurs, l'équation différentielle d'une ligne asymptotique nous donne

$$\frac{p\,du + p_1\,dv}{ds}\sin\omega - \frac{q\,du + q_1\,dv}{ds}\cos\omega = 0.$$

Ces deux relations peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{p\,du + p_1\,dv}{ds} + \frac{\cos\omega}{\tau_0} = 0, \\ &\frac{q\,du + q_1\,dv}{ds} + \frac{\sin\omega}{\tau_0} = 0. \end{aligned} \right. \tag{14}$$

En remplaçant $ds\sin\omega$, $ds\cos\omega$ par leurs expressions (5) [p. 363]

(¹) Cette élégante relation est due à M. Beltrami qui l'a donnée dans un article *Sur la courbure de quelques lignes tracées sur une surface*, inséré en 1865 aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2ᵉ série, t. IV, p. 258).

en fonction de du, dv, on trouvera

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(p + \frac{A\cos m}{\tau_0}\right)du + \left(p_1 + \frac{C\cos n}{\tau_0}\right)dv = 0,\\ &\left(q + \frac{A\sin m}{\tau_0}\right)du + \left(q_1 + \frac{C\sin n}{\tau_0}\right)dv = 0\end{aligned}\right.$$

ou, en éliminant $\frac{du}{dv}$,

$$(pq_1 - qp_1)\tau_0^2 + AC\sin\alpha = 0.$$

En introduisant, d'après la formule (14) [p. 364], le produit des rayons de courbure principaux, on obtient

$$(16)\qquad \tau_0 = \pm\sqrt{-RR'},$$

expression remarquable de la torsion due à M. Enneper. On en déduit, en particulier, que les lignes asymptotiques des surfaces à courbure totale constante sont des courbes gauches dont la torsion est invariable.

Si l'on porte l'expression de τ_0 dans la formule (13), elle deviendra

$$(17)\qquad \frac{1}{2\rho} = \frac{\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{1}{\rho_0}}{\dfrac{\sqrt{-RR'}}{\tau} - 1}.$$

Cette formule, due à M. O. Bonnet ([1]), comprend implicitement celle de M. Enneper; car il suffit d'y faire $\rho = \rho_0$ pour retrouver l'expression de la torsion d'une ligne asymptotique.

513. Il nous reste à déterminer ρ_0. Ici encore, la formule a été donnée par M. Bonnet.

Prenons le système de coordonnées formé par les lignes de courbure. La direction des lignes asymptotiques sera définie par l'équation

$$\frac{\sin^2\omega}{R'} + \frac{\cos^2\omega}{R} = 0,$$

([1]) *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2e série, t. IV, p. 267; 1865).

qui donne

$$(18)\qquad \cos\omega = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R-R'}},\qquad \sin\omega = \frac{\sqrt{-R'}}{\sqrt{R-R'}},\qquad \operatorname{tang}\omega = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{-R'}},$$

les radicaux ayant partout le même signe. La formule (18) [p. 354] nous donnera

$$\frac{ds}{\rho_0} = d\omega + r\,du + r_1\,dv$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{dv}{ds} + r\frac{du}{ds} + r_1\frac{dv}{ds}$$

ou, en remplaçant $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$ par leurs expressions en fonction de ω,

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{\cos\omega}{A}\frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\sin\omega}{C}\frac{\partial\omega}{\partial v} + \frac{r}{A}\cos\omega + \frac{r_1}{C}\sin\omega.$$

Or on déduit des formules du n° 500

$$\frac{r}{A} = \frac{R'}{CR}\,\frac{\frac{\partial R}{\partial v}}{R-R'},\qquad \frac{r_1}{C} = \frac{R}{AR'}\,\frac{\frac{\partial R'}{\partial u}}{R-R'},$$

et, en remplaçant r, r_1 par ces valeurs dans l'expression de ρ_0, on obtient

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{\cos\omega}{A}\frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\cos^2\omega\sin\omega}{A}\frac{\partial\log R'}{\partial u} + \frac{\sin\omega}{C}\frac{\partial\omega}{\partial v} - \frac{\sin^2\omega\cos\omega}{C}\frac{\partial\log R}{\partial v},$$

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{\cos^2\omega\sin\omega}{A}\frac{\partial\log(R'\operatorname{tang}\omega)}{\partial u} - \frac{\sin^2\omega\cos\omega}{C}\frac{\partial\log(R\cot\omega)}{\partial v}.$$

Remplaçons maintenant $\sin\omega$ et $\cos\omega$ par leurs valeurs, nous trouverons

$$(19)\qquad \frac{(R-R')^{\frac{3}{2}}}{\rho_0} = \frac{R^2}{2(-R')^{\frac{5}{2}}}\frac{\partial}{A\,\partial u}\left(\frac{-R'^3}{R}\right) - \frac{R'^2}{2R^{\frac{5}{2}}}\frac{\partial}{C\,\partial v}\left(\frac{R^3}{-R'}\right).$$

En prenant comme variables auxiliaires $\frac{R'^3}{R}$ et $\frac{R^3}{R'}$, on parviendra aisément à transformer cette formule et à la mettre sous la forme élégante

$$(20)\qquad \frac{1}{\rho_0} = \frac{4(-RR')^{\frac{7}{8}}}{(R-R')^{\frac{3}{2}}}\left[-\frac{\partial}{A\,\partial u}\left(\frac{R}{-R'^3}\right)^{\frac{1}{8}} + \frac{\partial}{C\,\partial v}\left(\frac{-R'}{R^3}\right)^{\frac{1}{8}}\right],$$

qui a été donnée par M. Bonnet, mais qui présente plus de difficultés que la précédente pour l'observation des signes.

On peut donner aux expressions trouvées une forme entièrement géométrique si l'on remarque que

$$\frac{\partial}{A\,\partial u},\quad \frac{\partial}{C\,\partial v}$$

représentent des dérivées relatives à des déplacements effectués sur les lignes de courbure. En désignant ces déplacements par ds_1, ds_2, on trouve, pour les valeurs absolues des deux rayons de courbure,

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{4(-RR')^{\frac{7}{8}}}{(R-R')^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{R}{-R'^3}\right)^{\frac{1}{8}} \pm \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{-R'}{R^3}\right)^{\frac{1}{8}}\right]. \tag{21}$$

Une application importante montre tout l'intérêt que peuvent présenter des recherches de la nature de celle que nous venons d'exposer. L'illustre Lamé s'était proposé, dans ses études de Physique mathématique, de déterminer tous les systèmes triples à la fois orthogonaux et isothermes, et la solution qu'il avait donnée de cette importante et très difficile question ne laissait pas de présenter des longueurs et même des difficultés. Dans un Mémoire déjà ancien [1], M. Bonnet a montré que toutes les surfaces faisant partie d'un système à la fois orthogonal et isotherme doivent jouir de la propriété suivante : Sur chaque ligne de courbure le rayon principal correspondant à cette ligne est proportionnel au cube de l'autre rayon. En d'autres termes, on doit avoir

$$\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{R}{-R'^3}\right)^{\frac{1}{8}} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{-R'}{R^3}\right)^{\frac{1}{8}} = 0; \tag{22}$$

et, par conséquent, M. O. Bonnet a pu déduire de sa formule que les lignes asymptotiques de chacune de ces surfaces doivent avoir un rayon de courbure infini, c'est-à-dire doivent se réduire à des droites. Les surfaces qui composent le système doivent donc être nécessairement du second degré.

---

(1) O. Bonnet, *Mémoire sur la théorie des surfaces isothermes orthogonales* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXe Cahier, p. 141; 1845).

CHAPITRE IV.

LES LIGNES GÉODÉSIQUES.

Formes diverses de l'équation différentielle des lignes géodésiques. — Les lignes de longueur nulle de la surface satisfont à cette équation différentielle. — Ligne géodésique passant par deux points suffisamment voisins. — Théorème de Gauss relatif aux lignes géodésiques qui passent par un point de la surface. — Plus court chemin entre deux points suffisamment voisins. — Géodésiques normales à une courbe quelconque. — Second théorème de Gauss; extension de la définition des courbes parallèles dans le plan. — Trajectoires orthogonales d'une famille quelconque de géodésiques; elles se déterminent par une simple quadrature. — Variation de longueur d'un segment de ligne géodésique. — Système orthogonal formé de deux familles d'ellipses et d'hyperboles géodésiques. — Théorème de M. Weingarten. — Coordonnées bipolaires dans le plan et sur la sphère. — Théorème de M. Liouville relatif à deux familles de lignes géodésiques qui se coupent mutuellement sous des angles constants.

---

514. Il nous reste maintenant à entreprendre l'étude de la formule

$$\frac{ds}{\rho_g} = d\omega + r\,du + r_1\,dv, \tag{1}$$

qui donne le rayon de courbure géodésique ρ_g d'une courbe quelconque tracée sur la surface. Cette formule se distingue des précédentes par une propriété essentielle, que nous avons déjà signalée : les quantités qui y figurent dépendent exclusivement de la forme de l'élément linéaire; et, par suite, la courbure géodésique demeure invariable quand on déforme la surface d'une manière quelconque. Nous commencerons par étudier les lignes géodésiques. Leur équation différentielle

$$d\omega + r\,du + r_1\,dv = 0 \tag{2}$$

est du second ordre. On ne sait l'intégrer que dans un petit nombre de cas; néanmoins Gauss, dans son célèbre Mémoire (¹),

---

(¹) GAUSS, *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (*Mémoires de la Société Royale des Sciences de Goettingue,* t. VI, 1828, et *Œuvres complètes,*

et les géomètres qui l'ont suivi ont enrichi la théorie des lignes géodésiques d'un grand nombre de propositions intéressantes que nous allons tout d'abord développer.

Nous indiquerons en premier lieu différentes formes de l'équation différentielle. Si nous conservons toutes les notations du Chapitre I [p. 348], nous aurons

$$(3)\qquad \cos\omega\, ds = \xi\, du + \xi_1\, dv, \qquad \sin\omega\, ds = \eta\, du + \eta_1\, dv$$

et, par suite,

$$(4)\qquad \omega = \operatorname{arc\,tang} \frac{\eta\, du + \eta_1\, dv}{\xi\, du + \xi_1\, dv}.$$

Les formules (A) (n° 484) nous donnent

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta r &= -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} + \eta\frac{\partial \eta_1}{\partial u} + \xi\frac{\partial \xi_1}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} - \eta_1\frac{\partial \eta}{\partial u} - \xi_1\frac{\partial \xi}{\partial u},\\ \Delta r_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} - \eta_1\frac{\partial \eta}{\partial v} - \xi_1\frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v} + \eta\frac{\partial \eta_1}{\partial v} + \xi\frac{\partial \xi_1}{\partial v}, \end{aligned}\right.$$

Δ désignant toujours le déterminant

$$(6)\qquad \Delta = \xi\eta_1 - \eta\xi_1.$$

Si l'on porte les valeurs de ω, r, r_1 dans l'équation (2) et si l'on développe les calculs en tenant compte des relations

$$(7)\qquad \xi^2 + \eta^2 = E, \qquad \xi\xi_1 + \eta\eta_1 = F, \qquad \xi_1^2 + \eta_1^2 = G,$$

on obtiendra l'équation suivante :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &2(EG - F^2)(du\, d^2v - dv\, d^2u)\\ &\quad = +\left(E\frac{\partial E}{\partial v} + F\frac{\partial E}{\partial u} - 2E\frac{\partial F}{\partial u}\right)du^3\\ &\qquad + \left(3F\frac{\partial E}{\partial v} - G\frac{\partial E}{\partial u} - 2F\frac{\partial F}{\partial u} - 2E\frac{\partial G}{\partial u}\right)du^2\, dv\\ &\qquad - \left(3F\frac{\partial G}{\partial u} + E\frac{\partial G}{\partial v} - 2F\frac{\partial F}{\partial v} - 2G\frac{\partial E}{\partial v}\right)du\, dv^2\\ &\qquad - \left(G\frac{\partial G}{\partial u} + F\frac{\partial G}{\partial v} - 2G\frac{\partial F}{\partial v}\right)dv^3, \end{aligned}\right.$$

---

t. IV, p. 217). Le Mémoire de Gauss a été souvent reproduit. On le trouve, en particulier, dans l'édition que M. Liouville a donnée en 1850 de l'*Application de l'Analyse à la Géométrie, par* MONGE.

qui caractérise les lignes géodésiques et ne contient que les quantités E, F, G.

515. Si l'on adopte l'arc s de la ligne géodésique comme variable indépendante, on peut substituer à l'équation précédente deux équations différentielles qui définiront u et v en fonction de s. On déduit, par exemple, de la première formule (3)

$$\omega = \arc\cos \frac{\xi\, du + \xi_1\, dv}{ds}.$$

Choisissons le système de translations pour lequel on a

$$\xi_1 = 0, \tag{9}$$

il faudra prendre

$$\eta_1 = \sqrt{G}, \qquad \eta = \frac{F}{\sqrt{G}}, \qquad \xi = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{G}}. \tag{10}$$

La substitution des valeurs de r, r_1, ω dans la formule (2) permettra de calculer $\frac{d^2 u}{ds^2}$ et nous donnera la première des deux équations suivantes

$$\left\{\begin{aligned} &2(EG - F^2)\frac{d^2 u}{ds^2} \\ &\quad = \left(2F\frac{\partial F}{\partial u} - G\frac{\partial E}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial v}\right)\frac{du^2}{ds^2} \\ &\qquad + 2\left(F\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial E}{\partial v}\right)\frac{du\,dv}{ds^2} + \left(F\frac{\partial G}{\partial v} + G\frac{\partial G}{\partial u} - 2G\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{dv^2}{ds^2}, \\ &2(EG - F^2)\frac{d^2 v}{ds^2} \\ &\quad = \left(F\frac{\partial E}{\partial u} + E\frac{\partial E}{\partial v} - 2E\frac{\partial F}{\partial u}\right)\frac{du^2}{ds^2} \\ &\qquad + 2\left(F\frac{\partial E}{\partial v} - E\frac{\partial G}{\partial u}\right)\frac{du\,dv}{ds^2} + \left(2F\frac{\partial F}{\partial v} - E\frac{\partial G}{\partial v} - F\frac{\partial G}{\partial u}\right)\frac{dv^2}{ds^2}, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

qui se déduisent l'une de l'autre par l'échange de u et de v, de E et de G. Pour déterminer complètement u et v en fonction de s, il faudra leur adjoindre la relation

$$E\frac{du^2}{ds^2} + 2F\frac{du\,dv}{ds^2} + G\frac{dv^2}{ds^2} = 1, \tag{12}$$

qui sert de définition à la variable auxiliaire s.

On peut remplacer les deux équations (11) par les suivantes :

$$(13)\quad \begin{cases} 2\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\mathrm{E}\,du+\mathrm{F}\,dv}{ds}\right)=\dfrac{\partial\mathrm{E}}{\partial u}\dfrac{du^2}{ds^2}+2\dfrac{\partial\mathrm{F}}{\partial u}\dfrac{du\,dv}{ds^2}+\dfrac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}\dfrac{dv^2}{ds^2},\\[2ex] 2\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\mathrm{F}\,du+\mathrm{G}\,dv}{ds}\right)=\dfrac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}\dfrac{du^2}{ds^2}+2\dfrac{\partial\mathrm{F}}{\partial v}\dfrac{du\,dv}{ds^2}+\dfrac{\partial\mathrm{G}}{\partial v}\dfrac{dv^2}{ds^2},\end{cases}$$

qui sont d'une forme plus élégante, mais ne sont pas résolues par rapport aux dérivées secondes.

516. Les différentes équations que nous venons d'obtenir mettent en évidence une propriété fondamentale des lignes géodésiques que l'on peut énoncer comme il suit :

Étant donnée une ligne géodésique et deux points quelconques A, B *pris sur cette ligne, la variation première de l'arc de la géodésique compris entre ces deux points est nulle quand on passe de cette géodésique à toute autre ligne infiniment voisine ayant les mêmes extrémités; et, réciproquement, toute ligne jouissant de cette propriété est une géodésique.*

Considérons, en effet, une ligne quelconque comprise entre les points A et B et définie par l'équation

$$v=\varphi(u);$$

son arc sera donné par la formule

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\sqrt{\mathrm{E}+2\mathrm{F}v'+\mathrm{G}v'^2}\,du,$$

v' désignant la dérivée de v par rapport à u. Si l'on veut que la variation première de l'arc soit nulle, on aura, en appliquant les principes du calcul des variations, l'équation différentielle

$$(14)\qquad \frac{d}{du}\left(\frac{\mathrm{G}v'+\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{E}+2\mathrm{F}v'+\mathrm{G}v'^2}}\right)-\frac{\dfrac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}+2\dfrac{\partial\mathrm{F}}{\partial v}v'+\dfrac{\partial\mathrm{G}}{\partial v}v'^2}{2\sqrt{\mathrm{E}+2\mathrm{F}v'+\mathrm{G}v'^2}}=0.$$

Si l'on développe les calculs, on retrouve l'équation (8). La proposition est donc établie.

Mais on peut aussi choisir l'arc s comme variable indépendante; alors l'équation (14) prend immédiatement et sans calcul la forme

de la seconde équation (13). La première de ces deux équations se déduisant de la seconde par l'échange de u et de v, on peut considérer comme démontré le système (13), système que l'on pourra ensuite résoudre par rapport aux dérivées secondes $\frac{d^2u}{ds^2}$, $\frac{d^2v}{ds^2}$, ce qui donnera les équations (11).

517. Les calculs de vérification que nous venons d'indiquer conduisent à une conséquence intéressante. Reprenons, par exemple, l'équation (14) où nous regarderons u comme variable indépendante. En la développant, on lui donnera d'abord la forme suivante :

$$\left[2\,d(Gv'+F)-du\left(\frac{\partial E}{\partial v}+2\frac{\partial F}{\partial v}v'+\frac{\partial G}{\partial v}v'^2\right)\right](E+2Fv'+Gv'^2)$$
$$-(Gv'+F)\,d(E+2Fv'+Gv'^2)=0.$$

On reconnaît ainsi immédiatement que *les lignes de longueur nulle de la surface, qui sont définies par l'équation*

$$E+2Fv'+Gv'^2=0,$$

satisfont à l'équation différentielle des lignes géodésiques.

Il est aisé, en effet, d'établir directement que ces lignes sont de véritables lignes géodésiques et que leur plan osculateur est, en chaque point, normal à la surface. Il suffit de remarquer que le plan osculateur de toute ligne de longueur nulle est tangent au cercle de l'infini et, par conséquent, normal à la tangente. Si donc une ligne de longueur nulle est tracée sur une surface, son plan osculateur en chaque point, étant normal à la tangente en ce point, contient nécessairement la normale à la surface.

On peut d'ailleurs vérifier autrement la propriété que nous venons d'établir. Si l'on suppose que la surface est rapportée à ses lignes de longueur nulle, on aura

$$E=0,\qquad G=0;$$

l'équation (8) prendra donc la forme particulièrement simple

$$(15)\qquad F(du\,d^2v-dv\,d^2u)-dv\,du\left(\frac{\partial F}{\partial u}du-\frac{\partial F}{\partial v}dv\right)=0.$$

On reconnaît ainsi que toutes les lignes coordonnées, définies par l'une ou l'autre des deux équations

$$dv = 0 \quad \text{ou} \quad du = 0,$$

satisfont à l'équation différentielle des lignes géodésiques (¹).

518. Les équations de différentes formes que nous venons d'obtenir pour les lignes géodésiques mettent en évidence un fait essentiel, sur lequel on s'appuie à chaque instant dans la théorie : c'est que, *par un point quelconque de la surface, il ne passe qu'une ligne géodésique admettant pour tangente en ce point une tangente déterminée de la surface*. En d'autres termes, *une ligne géodésique est pleinement déterminée par la condition de passer en un point de la surface et d'y admettre une tangente donnée.*

Si, au contraire, on veut assujettir une ligne géodésique à passer par deux points, il est aisé de reconnaître que ce problème peut avoir une infinité de solutions, alors même que les deux points seraient très rapprochés. Supposons, par exemple, que la surface donnée soit un cylindre de révolution; les lignes géodésiques seront des hélices. On reconnaîtra aisément que, si l'on prend sur le cylindre deux points M et M′, quelque voisins qu'ils soient, il y a une infinité de lignes géodésiques passant par ces deux points. Ces hélices se distinguent les unes des autres par le nombre de tours que fait sur chacune d'elles un point partant de

(¹) Les lignes de longueur nulle se distinguent toutefois des autres géodésiques par une propriété qu'il est bon de signaler. La variation première de l'arc, quand on passe d'une telle ligne à la courbe infiniment voisine, se présente sous une forme indéterminée. Cela tient à ce que l'arc de toute ligne infiniment voisine d'une ligne de longueur nulle est un infiniment petit de l'ordre $\frac{1}{2}$. Soit, en effet,

$$v = 0$$

une ligne de longueur nulle. Pour toute ligne infiniment voisine définie par l'équation

$$v = \varepsilon\varphi(u),$$

où ε est une quantité infiniment petite, on aura

$$s = \sqrt{\varepsilon}\int\sqrt{2F\varphi'(u)}\,du.$$

M avant d'arriver en M', et par le sens dans lequel s'effectue ce mouvement.

Mais, quelle que soit la surface considérée, on peut déterminer une grandeur l telle que, si l'on prend sur chaque ligne géodésique passant par M, et à partir de M, une longueur λ égale ou inférieure à l, il ne passera par le point M et par l'extrémité de cette longueur aucune autre ligne géodésique dont la longueur soit inférieure à l. Cette proposition n'est pas absolument évidente, mais on peut l'établir rigoureusement de la manière suivante.

Nous avons vu que les coordonnées u et v d'un point de la ligne géodésique sont définies en fonction de s par les équations (11), qui sont de la forme suivante :

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2u}{ds^2} &= a\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2b\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + c\left(\frac{dv}{ds}\right)^2, \\ \frac{d^2v}{ds^2} &= a'\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2b'\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + c'\left(\frac{dv}{ds}\right)^2, \end{aligned}\right.$$

a, b, a', ... étant des fonctions données de u et de v. Si l'on veut étudier l'ensemble des lignes géodésiques passant par un point M de coordonnées u_0, v_0, les équations différentielles donneront pour u et v des fonctions de l'arc s compté à partir de M et des valeurs initiales u_0, v_0, $\left(\frac{du}{ds}\right)_0$, $\left(\frac{dv}{ds}\right)_0$ relatives à ce point. Remarquons d'ailleurs que les équations différentielles précédentes ne changent pas de forme quand on y remplace s par αs, α désignant une constante quelconque. Il faudra donc que les valeurs de u et de v ne changent pas quand on remplace s, $\left(\frac{du}{ds}\right)_0$, $\left(\frac{dv}{ds}\right)_0$ respectivement par αs, $\frac{1}{\alpha}\left(\frac{du}{ds}\right)_0$, $\frac{1}{\alpha}\left(\frac{dv}{ds}\right)_0$. Cela ne peut avoir lieu que si u, v dépendent, en même temps que de u_0, v_0, des seules variables

$$u' = s\left(\frac{du}{ds}\right)_0, \qquad v' = s\left(\frac{dv}{ds}\right)_0.$$

On aura donc

$$u = f(u', v', u_0, v_0), \qquad v = \varphi(u', v', u_0, v_0).$$

Si les coefficients E, F, G et, par suite, les fonctions a, b, a', ... sont développables suivant les puissances entières de $u - u_0$, $v - v_0$, les fonctions f et φ seront développables suivant

les puissances de u' et de v'; et l'on aura des séries de la forme suivante :

$$u - u_0 = u' + \alpha u'^2 + 2\alpha' u' v' + \alpha'' v'^2 + \ldots,$$
$$v - v_0 = v' + \beta u'^2 + 2\beta' u' v' + \beta'' v'^2 + \ldots,$$

où les coefficients α, β, ... seront des fonctions de u_0, v_0, et qui seront convergentes pour toutes les valeurs de u', v' dont le module sera inférieur à une quantité fixe.

Le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')},$$

étant égal à 1 pour $u' = v' = 0$, les équations précédentes pourront être résolues par rapport à u', v' et donneront pour ces quantités des séries ordonnées suivant les puissances de $u - u_0$, $v - v_0$, séries qui demeureront convergentes tant que les modules de ces deux différences demeureront inférieurs à une quantité fixe. En d'autres termes, il ne passera par le point M et par un point suffisamment voisin M' qu'une ligne géodésique pour laquelle u' et v' soient inférieurs à une quantité fixe, c'est-à-dire dont la longueur soit inférieure à une quantité donnée ([1]). C'est la proposition que nous voulions établir. On peut encore l'énoncer en disant qu'on peut délimiter une région entourant le point M et telle que, par un point quelconque de cette région et par le point M, il ne passe qu'une seule ligne géodésique tout entière comprise dans la région ([2]).

([1]) Comme on a

$$E_0\left(\frac{du}{ds}\right)_0^2 + 2F_0\left(\frac{du}{ds}\right)_0\left(\frac{dv}{ds}\right)_0 + G_0\left(\frac{dv}{ds}\right)_0^2 = 1,$$

E_0, F_0, G_0 désignant les valeurs de E, F, G au point M, on obtient, en multipliant par s^2, la relation

$$s^2 = E_0 u'^2 + 2F_0 u' v' + G_0 v'^2,$$

qui montre que, si u', v' sont inférieures à une quantité fixe, il en sera de même de s.

([2]) Les variables u', v' sont celles auxquelles M. Lipschitz, dans des recherches plus générales, a donné le nom de *variables normales*. [*Voir*, en particulier, le *Bulletin des Sciences mathématiques* (1re série, t. IV, p. 97-110)].

519. Il résulte de cette proposition que, si l'on détermine chaque point de la région précédente par la longueur u de la ligne géodésique qui joint ce point au point M et par l'angle v que fait en M cette ligne géodésique avec une des tangentes en ce point à la surface, on aura constitué un système de coordonnées tout à fait analogue au système de coordonnées polaires dans le plan et dans lequel, à chaque point de la surface, correspondra un seul système de valeurs de u et de v, si l'on convient, par exemple, de prendre u positif et v compris entre o et 2π. L'élément linéaire de la surface sera donné par la formule

$$ds^2 = du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

dans laquelle E est égal à 1. On aura évidemment

$$F = 0, \qquad G = 0$$

pour $u = 0$.

Cela posé, exprimons que les lignes $v = \text{const.}$ sont des géodésiques. Si l'on emploie, par exemple, l'équation (8), on aura, en annulant dv et d^2v, la condition

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0;$$

F ne peut donc dépendre que de la seule variable v; et, comme on a $F = 0$ pour $u = 0$, F sera identiquement nul. Par suite, l'élément linéaire de la surface prendra la forme simple

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2. \tag{17}$$

520. On peut encore établir le même résultat en adoptant la forme de l'élément linéaire étudiée au Chapitre II [p. 362]. On aura ici

$$ds^2 = du^2 + 2C\cos\alpha\,du\,dv + C^2\,dv^2.$$

Remarquons d'ailleurs que, l'arc $C\,dv$ compris entre deux lignes géodésiques infiniment voisines devant diminuer indéfiniment quand u tend vers zéro, il faudra que l'on ait $C = 0$ pour $u = 0$, quel que soit v.

Cela posé, exprimons que les lignes $v = \text{const.}$ sont géodésiques. En appliquant la formule (2) et remarquant qu'ici ω est

égal à m, on a

$$\frac{\partial m}{\partial u} + r = 0$$

ou, en remplaçant r par sa valeur déduite des formules (A′) (nº 495)

$$-\frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\cot \alpha}{C}\frac{\partial C}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial(C\cos\alpha)}{\partial u} = 0.$$

Ainsi $C\cos\alpha$ doit être une fonction de v

(18) $$C\cos\alpha = \varphi(v).$$

Mais, comme C est nul, quel que soit v, pour $u = 0$, il faut nécessairement que l'on ait

$$\varphi(v) = 0.$$

L'équation précédente nous donne, pour une valeur quelconque de u,

$$C\cos\alpha = 0$$

et, par suite,

$$\cos\alpha = 0.$$

Nous retrouvons ainsi la forme déjà donnée

(19) $$ds^2 = du^2 + C^2 dv^2$$

de l'élément linéaire de la surface.

521. Cette forme est d'une importance capitale. Elle va nous permettre de démontrer que le chemin le plus court entre deux points suffisamment rapprochés d'une surface est toujours une ligne géodésique.

En effet, sur la portion de surface que nous avons définie plus haut et qui peut être considérée comme engendrée par une ligne géodésique de longueur l tournant autour de son extrémité M, prenons un point quelconque M′ de coordonnées u_0, v_0; u_0 sera la longueur de la ligne géodésique qui passe par M et M′. Si nous considérons tout autre chemin réunissant ces deux points et compris entièrement dans la portion de surface considérée, la longueur de ce chemin sera exprimée par l'intégrale

$$\int_0^{u_0} \sqrt{du^2 + C^2 dv^2}.$$

Or cette intégrale est évidemment supérieure à

$$\int_0^{u_0} du.$$

Donc le chemin est supérieur à u_0.

Si le chemin sort de la portion de surface que nous venons de définir, il faudra qu'il aille d'abord de M en un point μ de la limite. Le chemin $M\mu$, étant au moins égal à l d'après la démonstration précédente, sera déjà supérieur à u_0; il en sera donc de même *a fortiori* du chemin total.

On peut encore présenter le raisonnement précédent sous une forme géométrique. Construisons autour du point M les courbes $u =$ const. qui offriront autour de ce point la disposition générale d'une série de cercles concentriques autour de leur centre dans le plan. Considérons deux courbes infiniment voisines; l'arc d'une ligne quelconque compris entre ces deux courbes sera

$$\sqrt{du^2 + C^2 dv^2};$$

sa valeur minimum sera donc du et elle correspondra au cas où l'on suit, pour aller de l'une à l'autre courbe, une géodésique normale. Le plus court chemin de M à M′ est donc nécessairement la géodésique qui passe par ces deux points.

522. On peut généraliser comme il suit la proposition obtenue au n° 520.

Étant donnée (*fig.* 32) une courbe quelconque AA′, construisons les géodésiques normales à cette courbe. Nous définirons un point quelconque de la surface dans le voisinage de AA′ par l'arc $v =$ AP qui détermine le pied de la géodésique passant par le point M et par la longueur $u =$ MP comptée à partir de P sur cette géodésique. Tant que u sera inférieur à une limite fixe, un point n'aura qu'un seul système de coordonnées ([1]). Il suffit, en

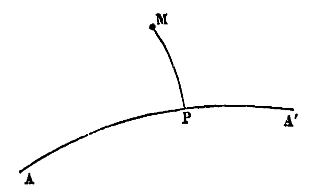
---

([1]) On peut démontrer cette proposition en toute rigueur; il suffit de s'appuyer sur les résultats obtenus au n° 518.

Nous avons vu que les valeurs de u et de v, relatives à un point quelconque d'une ligne géodésique passant en un point M de coordonnées u_0, v_0, sont des

effet, de remarquer que les lignes géodésiques normales à AA′ ne s'entrecroisent pas tant que u est inférieur à une limite que l'on pourra déterminer.

Fig. 32.



On aura encore, en prenant u et v comme variables,

$$ds^2 = du^2 + 2\,C\cos\alpha\,du\,dv + C^2\,dv^2,$$

---

fonctions des quatre variables

$$u_0,\quad v_0,\quad s\left(\frac{du}{ds}\right)_0,\quad s\left(\frac{dv}{ds}\right)_0.$$

Si le point M est pris sur une courbe (C) et si, de plus, la ligne géodésique doit être normale à (C), u_0, v_0, $\left(\frac{du}{ds}\right)_0$, $\left(\frac{dv}{ds}\right)_0$ deviennent des fonctions de la variable qui fixe la position de ce point sur la courbe. Désignons cette variable par σ; u et v seront des fonctions de s et de σ. Le déterminant fonctionnel

$$\frac{d(u, v)}{d(s, \sigma)}$$

a évidemment pour valeur initiale

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{du}{ds}\right)_0 & \frac{du_0}{d\sigma} \\ \left(\frac{dv}{ds}\right)_0 & \frac{dv_0}{d\sigma} \end{vmatrix};$$

$\left(\frac{du}{ds}\right)_0$, $\left(\frac{dv}{ds}\right)_0$, déterminant la tangente à la ligne géodésique, ne peuvent être proportionnels à $\frac{du_0}{d\sigma}$, $\frac{dv_0}{d\sigma}$ qui définissent la tangente à la courbe (C).

La valeur initiale du déterminant fonctionnel n'étant pas nulle, ce déterminant demeure différent de zéro pour des valeurs suffisamment petites de s. Par conséquent, u et v sont des fonctions indépendantes de s et de σ dans la région voisine de la courbe (C), et, réciproquement, s et σ sont des fonctions indépendantes de u et de v n'admettant qu'une seule détermination dans le voisinage de la courbe (C).

avec la condition

$$C \cos\alpha = \varphi(v),$$

qui exprime que les lignes de paramètre v sont des géodésiques.

D'ailleurs, pour $u = 0$, on a

$$\cos\alpha = 0$$

quel que soit v. On a donc encore

$$\varphi(v) = 0,$$

et, par conséquent, on retrouve pour l'élément linéaire la forme déjà obtenue

$$ds^2 = du^2 + C^2 dv^2.$$

Ainsi, *lorsqu'on porte sur les lignes géodésiques normales à une courbe des longueurs constantes, le lieu des extrémités de ces longueurs est une courbe également normale aux lignes géodésiques*. C'est la généralisation d'un résultat bien connu, relatif aux courbes parallèles dans le plan. Les deux théorèmes précédents sont dus, comme on sait, à Gauss.

523. On peut encore les démontrer de la manière suivante. Considérons sur une portion de la surface une famille de géodésiques telle qu'il ne passe qu'une de ces lignes par chaque point de la région considérée, et associons à ces lignes une autre famille de courbes quelconques qui, jointe à la première, permette de constituer un système de coordonnées propre à déterminer tous les points de la région. L'élément linéaire de la surface sera représenté par une formule telle que la suivante

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

où nous supposerons que les lignes géodésiques soient les courbes de paramètre v. Si l'on se reporte à l'équation (8) et si l'on exprime qu'elle est vérifiée lorsqu'on y introduit l'hypothèse $dv = 0$, on sera conduit à l'équation de condition

$$E\frac{\partial E}{\partial v} + F\frac{\partial E}{\partial u} - 2E\frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

à laquelle on peut donner la forme suivante :

$$(20) \qquad \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{F}{\sqrt{E}}.$$

On peut donc poser

$$(21) \qquad \sqrt{E} = \frac{\partial\theta}{\partial u}, \qquad \frac{F}{\sqrt{E}} = \frac{\partial\theta}{\partial v}, \qquad F = \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

En substituant les valeurs de E et de F dans l'élément linéaire, on lui donnera la forme suivante :

$$ds^2 = d\theta^2 + \frac{EG - F^2}{E}\,dv^2.$$

On voit donc que les courbes définies par l'équation

$$(22) \qquad \theta = \int\left(\sqrt{E}\,du + \frac{F}{\sqrt{E}}\,dv\right) = \text{const.}$$

sont les trajectoires orthogonales des géodésiques considérées. Ainsi :

On peut toujours, par une simple quadrature, déterminer les trajectoires orthogonales d'une famille quelconque de géodésiques; et, si l'on rapporte les points de la surface au système de coordonnées formé par les géodésiques ($v =$ const.) *et leurs trajectoires orthogonales* ($\theta =$ const.), *l'élément linéaire prend la forme*

$$(23) \qquad ds^2 = d\theta^2 + G\,dv^2.$$

L'interprétation géométrique est immédiate. *Deux trajectoires orthogonales quelconques interceptent le même arc sur toutes les géodésiques considérées.* Ces résultats sont en parfait accord avec ceux que nous avons déjà obtenus.

Dans le cas où les lignes géodésiques passent toutes par un point, il y a, évidemment, des trajectoires orthogonales qui, dans une portion de leur parcours vue du point sous un angle fini, restent infiniment voisines de ce point; et, par conséquent, le point lui-même peut être assimilé à une trajectoire orthogonale, ce qui démontre le premier théorème de Gauss.

524. Nous voyons que la considération des lignes géodésiques nous conduit à des systèmes nouveaux pour lesquels on doit faire

$$A = 1$$

dans les formules du n° 499. Remarquons la forme exceptionnellement simple que prend, dans ces systèmes, l'expression de la courbure totale. On a alors, d'après la formule (22) (n° 499),

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}, \tag{24}$$

expression qui est due à Gauss et dont nous aurons souvent à faire usage.

Nous donnerons, par analogie, le nom de *courbes parallèles* aux trajectoires orthogonales d'une famille de géodésiques.

525. On peut déduire des résultats précédents une formule fondamentale relative à la variation de longueur d'un segment de ligne géodésique.

Soit (*fig.* 33) MP un segment de ligne géodésique dont les

Fig. 33.

extrémités M et P décrivent deux courbes données (C) et (D). Employons le système de coordonnées curvilignes formé par les positions successives MP, M'P', ... du segment et par leurs trajectoires orthogonales. L'élément linéaire, dans ce système, prendra la forme (23); si u, u_0 désignent les valeurs de u aux points M et P, on aura

$$\text{arc}\,MP = u - u_0.$$

De même, si $u + du$, $u_0 + du_0$ sont les valeurs de u correspondantes aux points M', P', on aura

$$\text{arc}\,M'P' = u + du - u_0 - du_0,$$

ce qui donne

$$d\,\text{arc}\,\text{MP} = du - du_0.$$

Or, dans les triangles infiniment petits MM'H, PP'K formés avec les trajectoires orthogonales MH et PK, on a

$$\begin{aligned} \text{M'H} &= \quad du \;= -\text{MM'}\cos\widehat{\text{M'MP}}, \\ \text{KP'} &= -du_0 = -\text{PP'}\cos\widehat{\text{P'PM}} \end{aligned}$$

et, par conséquent, la substitution de ces valeurs de du, du_0 conduit au résultat suivant :

$$(25) \qquad d\,\text{arc}\,\text{MP} = -\,\text{MM'}\cos\widehat{\text{M'MP}} - \text{PP'}\cos\widehat{\text{P'PM}}.$$

Cette formule est identique à celle qui donne la différentielle d'un segment de droite. Comme il est facile de l'obtenir directement par le calcul des variations, elle pourrait conduire aux propositions de Gauss par un chemin inverse de celui que nous avons suivi.

526. La formule (25) permet d'étendre aux lignes géodésiques un grand nombre des propositions qui s'appliquent, dans la géométrie du plan, aux systèmes de lignes droites. On peut constituer, par exemple, sur toute surface, une théorie analogue à celle des développées et des développantes d'une courbe plane. Nous laisserons au lecteur le soin de poursuivre ces généralisations, et nous nous attacherons, de préférence, à la conséquence suivante de la formule fondamentale.

Considérons (*fig.* 34) deux courbes (C), (C') et cherchons le lieu des points tels que la somme ou la différence de leurs *distances géodésiques* à ces deux courbes soit constante. Si, d'un point M du lieu, on abaisse les *normales géodésiques* MP, MQ sur les deux courbes, on devra avoir

$$\text{MP} \pm \text{MQ} = \text{const.};$$

et, par suite, lorsqu'on passera d'un point M du lieu au point infiniment voisin M', il viendra

$$d\,\text{MP} \pm d\,\text{MQ} = 0.$$

La formule (25) nous donne

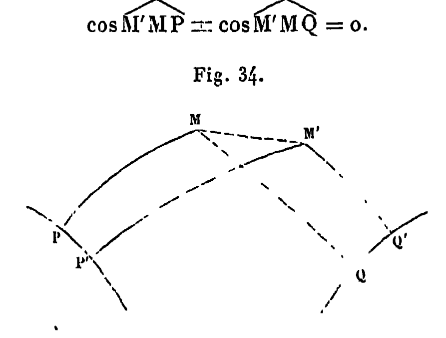
$$d\,\mathrm{MP} = -\,\mathrm{MM'}\cos\widehat{\mathrm{M'MP}},$$

$$d\,\mathrm{MQ} = -\,\mathrm{MM'}\cos\widehat{\mathrm{M'MQ}}.$$

En substituant ces valeurs des différentielles dans la relation précédente, on trouvera

$$\cos\widehat{\mathrm{M'MP}} \pm \cos\widehat{\mathrm{M'MQ}} = 0.$$

Fig. 34.



Dans le cas où l'on prend le signe + et où, par conséquent, la somme des distances est constante, l'équation exprime que la tangente au lieu est la bissectrice de l'angle formé par une ligne géodésique et le prolongement de l'autre. Quand on prend le signe —, c'est-à-dire quand la différence des distances est constante, la tangente est la bissectrice de l'angle formé par les deux normales géodésiques.

En rapprochant ces deux résultats, nous obtenons le théorème suivant :

Si l'on construit sur une surface quelconque toutes les courbes lieux des points pour lesquels la somme ou la différence des distances géodésiques à deux courbes données demeure constante, on obtient dans tous les cas deux familles de courbes se coupant à angle droit.

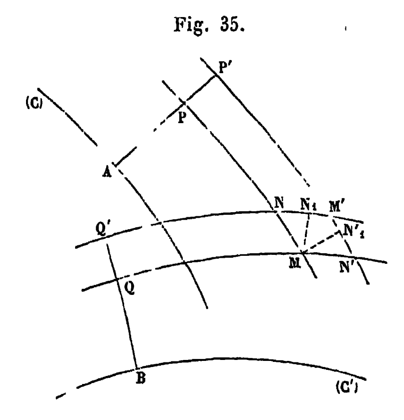
Nous donnerons, dans la suite, le nom d'*ellipses* et d'*hyperboles géodésiques* aux courbes qui composent ces deux familles. Leur définition ne change pas si l'on substitue aux deux courbes de base (C) et (C') des courbes parallèles quelconques. Il faut

toutefois remarquer que ce changement peut transformer les *ellipses* en *hyperboles* et *vice versa*.

527. Nous allons chercher la forme que prend l'élément linéaire de la surface quand on adopte le système de coordonnées curvilignes que nous venons de définir; mais nous prendrons comme intermédiaire un système de coordonnées obliques formé avec deux séries de courbes parallèles.

Considérons (*fig.* 35) une première famille de courbes paral-

Fig. 35.



lèles, que nous définirons par leurs distances $u = AP$ à l'une d'elles (C), distance comptée sur une géodésique normale. Soit de même une seconde famille de courbes parallèles que nous définirons par leurs distances $v = BQ$ à l'une d'elles (C').

Construisons les quatre courbes de paramètres u, $u + du$, v, $v + dv$ qui formeront un parallélogramme curviligne MNM'N' dont l'angle M sera désigné par α et dont les côtés auront pour valeurs

$$MN' = A\, du, \qquad MN = C\, dv,$$

A et C étant les quantités qui figurent dans l'expression

$$ds^2 = A^2\, du^2 + C^2\, dv^2 + 2AC \cos\alpha\, du\, dv$$

de l'élément linéaire. Si l'on mène par le point M les géodésiques MN_1, MN'_1 normales aux côtés opposés du parallélogramme, les longueurs de ces géodésiques sont

$$MN_1 = dv, \qquad MN'_1 = du.$$

Dans les triangles MNN_1, $MN'N'_1$ que l'on peut assimiler à des triangles rectilignes, on aura

$$MN_1 = MN \sin\alpha, \qquad MN'_1 = MN' \sin\alpha,$$

c'est-à-dire

$$du = A\,du \sin\alpha, \qquad dv = C\,dv \sin\alpha$$

et, par suite,

$$A = C = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

L'expression de l'élément linéaire sera donc

$$(26) \qquad ds^2 = \frac{du^2 + dv^2 + 2\,du\,dv\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Si l'on prend maintenant

$$(27) \qquad u + v = 2u', \qquad u - v = 2v',$$

les courbes de paramètre u', v' seront les ellipses et les hyperboles géodésiques définies plus haut, et l'expression de l'élément linéaire prend la forme

$$(28) \qquad ds^2 = \frac{du'^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{dv'^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}},$$

qui met en évidence l'orthogonalité déjà démontrée.

528. M. Weingarten, auquel est dû le résultat précédent [1], l'a établi par une autre méthode, que nous allons indiquer. Soit

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

l'expression de l'élément linéaire. Puisque u désigne la distance géodésique à une courbe (C), l'élément linéaire pourra se mettre sous la forme

$$ds^2 = du^2 + \sigma^2\,du'^2.$$

Il faudra donc que la différence

$$ds^2 - du^2 = (E-1)\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

---

[1] WEINGARTEN (J.), *Ueber die Oberflächen für welche einer der beiden Hauptkrummungshalbmesser eine Function der anderen ist* (*Journal de Crelle*, t. LXII, p. 160-173; 1862).

soit un carré parfait. Cela nous donne la condition

$$F^2 = G(E - 1).$$

En exprimant de même que v est la distance géodésique à une seconde courbe, on obtiendra la condition

$$F^2 = E(G - 1).$$

Ces deux relations, employées simultanément, nous donnent

$$E = G, \qquad F = \sqrt{E(E-1)},$$

et l'élément linéaire prend la forme

$$(29) \qquad ds^2 = E(du^2 + dv^2) + 2\sqrt{E(E-1)}\,du\,dv.$$

En remplaçant E par $\frac{1}{\sin^2\alpha}$, on retrouve la formule que nous avons démontrée directement par la Géométrie.

529. La fonction α qui figure dans cette formule dépend de la nature de la surface, ainsi que des courbes de base (C), (C′), et ne peut pas être déterminée en général. Nous allons indiquer deux applications dans lesquelles on obtient sans difficulté l'expression de α.

Considérons d'abord les coordonnées bipolaires dans un plan. Si l'on appelle r, r' les distances d'un point du plan à deux points fixes, la formule (26) nous donnera

$$(30) \qquad ds^2 = \frac{dr^2 + dr'^2 + 2\,dr\,dr'\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Soient O, O′ les deux pôles et M le point considéré. Désignons par $2c$ la distance des deux pôles. Le triangle OO′M nous donnera

$$(31) \qquad 4c^2 = r^2 + r'^2 + 2rr'\cos\alpha,$$

équation d'où nous pourrons tirer α. Mais auparavant remarquons que, si l'on pose

$$(32) \qquad \begin{cases} r + r' = 2\mu, \\ r - r' = 2\nu, \end{cases}$$

l'expression de l'élément linéaire deviendra

$$(33) \qquad ds^2 = \frac{d\mu^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{d\nu^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}},$$

et l'on déduira de la formule (31) l'équation

$$(34) \qquad c^2 = \mu^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \nu^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

qui fera connaître les valeurs de $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$. En les portant dans la formule (33), nous aurons

$$(35) \qquad ds^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{d\mu^2}{\mu^2 - c^2} + \frac{d\nu^2}{c^2 - \nu^2}\right).$$

Les courbes $\mu =$ const. sont des ellipses homofocales, les courbes $\nu =$ const. des hyperboles ayant les mêmes foyers. On voit ainsi que le système des coordonnées elliptiques n'est qu'une modification, et une modification avantageuse, du système des coordonnées bipolaires. Cela explique pourquoi ce dernier système est si rarement employé.

Si l'on prenait de même sur la sphère le système de coordonnées bipolaires en désignant toujours par $2c$ la distance des pôles, il faudrait substituer à l'équation (31) la suivante

$$(36) \qquad \cos 2c = \cos r \cos r' - \sin r \sin r' \cos \alpha,$$

que donne immédiatement le triangle sphérique OO'M. On peut l'écrire

$$\cos 2c = \cos 2\mu \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos 2\nu \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

et, par conséquent, on aura pour la sphère

$$(37) \qquad ds^2 = (\cos 2\mu - \cos 2\nu)\left(\frac{d\mu^2}{\cos 2\mu - \cos 2c} + \frac{d\nu^2}{\cos 2c - \cos 2\nu}\right).$$

Les courbes coordonnées sont des ellipses et des hyperboles homofocales.

530. Après ces applications particulières, nous signalerons, comme conséquence générale de la formule (8) relative à une surface quelconque, cette proposition due à M. Liouville : *Si l'on a*

sur une surface deux systèmes de lignes géodésiques se coupant sous un angle constant, la surface sera plane ou développable. En effet, si nous construisons les courbes parallèles trajectoires orthogonales de ces géodésiques, elles se couperont, elles aussi, sous un angle constant et, par conséquent, l'élément linéaire de la surface pourra être mis sous la forme (26) ou mieux sous la forme (28), l'angle α étant constant. Posons alors

$$u' = x \sin\frac{\alpha}{2},$$

$$v' = y \cos\frac{\alpha}{2};$$

il restera

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

ce qui montre bien que la surface est applicable sur le plan.

CHAPITRE V.

LES FAMILLES DE COURBES PARALLÈLES.

Méthode générale de recherche des lignes géodésiques. — Définition du paramètre différentiel $\Delta\theta$. — Toute fonction dont le paramètre est égal à 1 fait connaître une famille de courbes parallèles. — Lorsque cette fonction contient une constante arbitraire, on peut déterminer les lignes géodésiques de la surface. — Proposition réciproque; lorsqu'on connaît les lignes géodésiques, on peut intégrer, par une simple quadrature, l'équation $\Delta\theta = 1$. — Théorème de Jacobi : Lorsqu'on a obtenu une intégrale première de l'équation différentielle du second ordre des lignes géodésiques, on peut toujours déterminer un facteur de cette intégrale. — Conséquences diverses. — Expression de l'élément linéaire de la surface au moyen de la fonction θ et de ses dérivées par rapport à la constante arbitraire a. — Équation du troisième ordre à laquelle satisfait la fonction θ. — Indication d'une autre méthode permettant d'établir les résultats précédents. — Distance géodésique de deux points. — Propositions relatives à cette distance.

---

531. Les propositions établies dans le Chapitre précédent conduisent à une méthode élégante de recherche des lignes géodésiques, que nous allons exposer avec tous les détails nécessaires.

Considérons une géodésique quelconque de la surface; on peut évidemment lui associer une infinité d'autres géodésiques, par exemple toutes celles qui passent en un de ses points, et constituer avec les trajectoires orthogonales de ces lignes un système de coordonnées curvilignes pour lequel l'élément linéaire prendra la forme

$$ds^2 = d\theta^2 + \sigma^2\, d\theta_1^2.$$

On sera donc assuré d'obtenir toutes les lignes géodésiques si l'on sait résoudre dans toute sa généralité le problème d'Analyse suivant :

Étant donné l'élément linéaire d'une surface sous sa forme la plus générale

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

déterminer trois fonctions θ, σ, θ_1 *de* u *et de* v, *telles que l'on ait identiquement*

$$(1) \qquad E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = d\theta^2 + \sigma^2\,d\theta_1^2.$$

Cette équation se décompose évidemment dans les trois suivantes :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 + \sigma^2\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\right)^2, \\ F &= \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + \sigma^2\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\frac{\partial\theta_1}{\partial v}, \\ G &= \left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 + \sigma^2\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial v}\right)^2, \end{aligned} \right.$$

entre lesquelles on pourra éliminer $\sigma\frac{\partial\theta_1}{\partial u}$ et $\sigma\frac{\partial\theta_1}{\partial v}$. On est ainsi conduit à la relation

$$(3) \qquad G\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 = EG - F^2,$$

que l'on obtiendrait d'ailleurs immédiatement en écrivant que le polynôme homogène en du, dv

$$ds^2 - d\theta^2$$

est un carré parfait. Si l'on pose, pour abréger,

$$(4) \qquad \Delta\theta = \frac{G\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2}{EG - F^2},$$

l'équation (3) pourra s'écrire encore

$$(5) \qquad \Delta\theta = 1.$$

Nous rencontrerons fréquemment dans la suite la fonction $\Delta\theta$, à laquelle nous donnerons, avec M. Beltrami, le nom de *paramètre différentiel du premier ordre* de θ.

Réciproquement, il est aisé de démontrer qu'à toute solution de l'équation (5) correspond une famille de courbes parallèles, c'est-à-dire de courbes dont les trajectoires orthogonales sont des lignes géodésiques.

En effet, l'équation (5) exprime, nous l'avons vu, que $ds^2 - d\theta^2$ est un carré parfait; on aura donc, quelles que soient les diffé-

rentielles du, dv,

$$ds^2 - d\theta^2 = (m\,du + n\,dv)^2,$$

m et n étant des fonctions de u et de v. Or on peut toujours ramener la fonction linéaire $m\,du + n\,dv$ à la forme $\sigma\,d\theta_1$. On aura donc

$$ds^2 = d\theta^2 + \sigma^2\,d\theta_1^2;$$

θ_1 sera d'ailleurs une fonction distincte de θ, car autrement ds^2 serait un carré parfait. Notre proposition réciproque est donc établie, et toute solution de l'équation (5) nous donne une famille de courbes parallèles.

532. Cette équation (5) a, comme on sait, des solutions d'espèces très différentes. On peut en trouver qui ne contiennent aucune constante arbitraire; d'autres qui contiennent une ou plusieurs constantes arbitraires, ou même une fonction arbitraire. Au point de vue de la question qui nous occupe, il est essentiel de considérer successivement ces diverses solutions.

Si l'on a obtenu une solution de l'équation (5) ne contenant aucune arbitraire, l'application de la méthode précédente, qui prescrit de mettre la différentielle $m\,du + n\,dv$ sous la forme $\sigma\,d\theta_1$, exige l'intégration de l'équation

$$m\,du + n\,dv = 0, \tag{6}$$

qui est celle des lignes géodésiques trajectoires orthogonales des courbes $\theta =$ const. On ne connaît aucune proposition qui permette d'effectuer l'intégration de cette équation ou qui la rende plus facile.

Supposons, au contraire, que l'on ait obtenu une solution de l'équation aux dérivées partielles (5) contenant une constante autre que celle qui peut toujours être réunie à θ par addition, *constante qui devra figurer par conséquent dans l'une au moins des deux dérivées* $\frac{\partial\theta}{\partial u}$, $\frac{\partial\theta}{\partial v}$. Nous allons voir que, dans ce cas (auquel on peut ramener tous ceux où la fonction contient plusieurs constantes ou une fonction arbitraire), on pourra, par de simples dérivations, obtenir σ et θ_1 et, par suite, les équations finies

des lignes géodésiques qui sont les trajectoires orthogonales des courbes $\theta = \text{const.}$

Reprenons, en effet, l'identité

$$ds^2 = d\theta^2 + \sigma^2 d\theta_1^2.$$

Cette équation a lieu entre cinq variables : u, v, du, dv et la constante arbitraire qui entre dans θ et que nous désignerons par a. Différentions par rapport à a en traitant les *quatre* autres variables comme des constantes. La différentielle de θ

$$d\theta = \frac{\partial\theta}{\partial u} du + \frac{\partial\theta}{\partial v} dv$$

deviendra

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial a\,\partial u} du + \frac{\partial^2\theta}{\partial a\,\partial v} dv = d\frac{\partial\theta}{\partial a},$$

et l'on aura un résultat analogue pour θ_1. Nous aurons donc, puisque ds^2 ne contient pas a,

$$(7) \qquad 0 = d\theta\, d\left(\frac{\partial\theta}{\partial a}\right) + \sigma\, d\theta_1\left[\frac{\partial\sigma}{\partial a} d\theta_1 + \sigma\, d\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial a}\right)\right].$$

L'équation précédente nous montre que $d\theta_1$, fonction linéaire de du, dv, doit diviser soit $d\theta$, soit $d\left(\frac{\partial\theta}{\partial a}\right)$. Or $d\theta_1$ ne peut diviser $d\theta$, car alors θ_1 serait fonction de θ. Il faut donc que $d\theta_1$ divise $d\frac{\partial\theta}{\partial a}$; θ_1 est une fonction de $\frac{\partial\theta}{\partial a}$, et l'on peut prendre, par conséquent,

$$\theta_1 = \frac{\partial\theta}{\partial a}.$$

Avant de déduire d'autres conséquences de l'équation (7), nous allons nous arrêter à ce premier résultat. Nous voyons que les lignes géodésiques qui coupent à angle droit les courbes $\theta = \text{const.}$ ont pour équation

$$(8) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial a} = \text{const.} = a',$$

et de plus leur arc, compté à partir de l'une de leurs trajectoires, est précisément égal à θ.

L'équation (8) contient deux constantes arbitraires dont on pourra disposer de manière à faire passer la ligne géodésique par

un point quelconque et à lui donner en ce point une tangente quelconque. Pour établir en toute rigueur ce point essentiel, nous montrerons qu'on peut faire passer une des courbes

$$\theta = \text{const.}$$

par un point quelconque (u_0, v_0) et lui donner en ce point une tangente déterminée.

Remarquons d'abord que le rapport

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} : \frac{\partial\theta}{\partial v}$$

ne saurait être indépendant de a. En effet, s'il en était ainsi, si l'on avait

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial v} f(u, v),$$

en joignant cette équation à la suivante

$$\Delta\theta = 1,$$

on pourrait déterminer des valeurs de $\frac{\partial\theta}{\partial u}$, $\frac{\partial\theta}{\partial v}$ qui seraient, l'une et l'autre, indépendantes de a, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Cela posé, considérons la courbe (θ) définie par l'équation

$$\theta(u, v, a) = \theta(u_0, v_0, a) = \theta_0.$$

Elle passe évidemment par le point (u_0, v_0), et la direction de sa tangente en ce point dépend du rapport $\frac{\partial\theta_0}{\partial u_0} : \frac{\partial\theta_0}{\partial v_0}$. Comme ce rapport n'est pas indépendant de a, il pourra prendre toutes les valeurs possibles. Ainsi les courbes $\theta = \text{const.}$ peuvent passer en un point quelconque de la surface et y admettre une tangente quelconque; il en sera donc de même des lignes géodésiques représentées par l'équation (8), qui sont leurs trajectoires orthogonales. Comme une ligne géodésique est déterminée par la condition de passer en un point et d'y admettre une tangente donnée, nous pouvons dire que l'équation (8) représente toutes les lignes géodésiques et énoncer le théorème suivant :

Pour déterminer les lignes géodésiques, on considère l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta\theta = 1.$$

Toute solution de cette équation, égalée à une constante, déterminera une famille de courbes parallèles.

Si l'on a une solution contenant une constante arbitraire a, l'équation de la ligne géodésique la plus générale sera

$$\frac{\partial \theta}{\partial a} = a',$$

et l'arc compris entre deux points de cette ligne géodésique sera égal à la différence des valeurs de θ *relatives à ces deux points.*

Réciproquement, supposons que l'on ait déterminé par un procédé quelconque les lignes géodésiques; nous allons montrer qu'on saura intégrer l'équation

$$\Delta\theta = 1.$$

Cherchons, par exemple, la solution θ de cette équation qui est égale à zéro en tous les points d'une courbe (C) donnée à l'avance. On construira toutes les lignes géodésiques normales à (C). L'arc de l'une de ces lignes, compté à partir de (C), sera une fonction des coordonnées de son extrémité que l'on obtiendra par une quadrature et qui sera la solution cherchée. Cette remarque, convenablement étendue, est très importante pour la théorie des équations aux dérivées partielles; ici, du moins, elle nous permet de reconnaître que la méthode de recherche des lignes géodésiques instituée par le théorème précédent n'introduit aucune difficulté étrangère à la question.

533. Nous signalerons en premier lieu les conséquences suivantes de la théorie générale que nous venons de développer.

Imaginons que l'on connaisse une équation différentielle

$$(9) \qquad \frac{dv}{du} = v' = \varphi(u, v),$$

dont *toutes* les intégrales particulières soient des lignes géodésiques et cherchons l'équation différentielle de leurs trajectoires orthogonales. En appliquant la formule

$$\mathrm{E}\, du\, \delta u + \mathrm{F}(du\, \delta v + dv\, \delta u) + \mathrm{G}\, dv\, \delta v = 0,$$

qui exprime l'orthogonalité de deux directions, on obtiendra l'équation cherchée sous la forme

$$(E + Fv')\,du + (F + Gv')\,dv = 0, \tag{10}$$

v' devant être remplacé par sa valeur tirée de l'équation (9).

Or on sait que l'on peut trouver un facteur λ tel que le produit

$$\lambda[(E + Fv')\,du + (F + Gv')\,dv]$$

soit la différentielle d'une fonction θ satisfaisant à l'équation

$$\Delta\theta = 1.$$

Si donc on pose

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = \lambda(E + Fv'), \qquad \frac{\partial\theta}{\partial v} = \lambda(F + Gv'),$$

et si l'on exprime que l'équation aux dérivées partielles précédentes est vérifiée, on obtiendra la valeur de λ, qui est

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}}.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant, qui a d'ailleurs été établi sous une autre forme au n° 523.

Si l'équation différentielle

$$\frac{dv}{du} = v' = \varphi(u, v)$$

représente des lignes géodésiques, l'expression

$$\frac{(E + Fv')\,du + (F + Gv')\,dv}{\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}}$$

est la différentielle exacte d'une fonction θ; *l'équation*

$$\theta = \text{const.}$$

représente les trajectoires orthogonales des lignes géodésiques satisfaisant à l'équation différentielle proposée, et θ *désigne la distance géodésique d'un point quelconque de la surface à l'une de ces trajectoires orthogonales.*

Cette proposition va nous conduire à un beau théorème de Jacobi :

Si l'on connaît une intégrale première de l'équation différentielle des lignes géodésiques, on pourra obtenir l'équation en termes finis de ces lignes par une simple quadrature.

Soit, en effet,

$$v' = \varphi(u, v, a) \tag{11}$$

l'intégrale première, contenant la constante a. La fonction

$$\theta = \int \frac{(E + F v')\,du + (F + G v')\,dv}{\sqrt{E + 2F v' + G v'^2}}, \tag{12}$$

qui, d'après ce que nous venons de démontrer, satisfait à l'équation $\Delta\theta = 1$, contiendra la constante arbitraire a. Donc l'équation des lignes géodésiques sera

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = a'.$$

En prenant la dérivée par rapport à a sous le signe d'intégration, on trouve

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = \int \frac{(EG - F^2)\dfrac{\partial v'}{\partial a}}{(E + 2F v' + G v'^2)^{\frac{3}{2}}}(dv - v'\,du), \tag{13}$$

ce qui permet d'énoncer le théorème suivant :

Quand on aura obtenu, par un moyen quelconque, une intégrale première

$$v' = \varphi(u, v, a)$$

de l'équation des lignes géodésiques, on en déterminera immédiatement un facteur; de sorte que

$$\frac{(EG - F^2)\dfrac{\partial v'}{\partial a}}{(E + 2F v' + G v'^2)^{\frac{3}{2}}}(dv - v'\,du)$$

sera une différentielle exacte après que l'on aura remplacé v' par sa valeur $\varphi(u, v, a)$.

534. Nous allons maintenant indiquer quelques conséquences moins importantes des résultats obtenus et, en particu-

lier, de l'équation (7). Si l'on y remplace θ_1 par $\frac{\partial\theta}{\partial a}$ et si l'on divise par $d\theta_1$, elle prend la forme

$$d\theta + \sigma \frac{\partial\sigma}{\partial a} d\frac{\partial\theta}{\partial a} + \sigma^2 d\frac{\partial^2\theta}{\partial a^2} = 0.$$

Cette relation devant avoir lieu pour toutes les valeurs de du et de dv, on peut y remplacer du, dv respectivement par $\frac{\partial^2\theta}{\partial a\,\partial v}$, $-\frac{\partial^2\theta}{\partial a\,\partial u}$; si l'on désigne, pour abréger, par (α, β) le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v} - \frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\partial\beta}{\partial u}$$

de deux fonctions quelconques α, β, on aura

$$\left(\theta, \frac{\partial\theta}{\partial a}\right) + \sigma^2\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial a^2}, \frac{\partial\theta}{\partial a}\right) = 0$$

et, par suite,

(14) $$\sigma^2 = \frac{\left(\theta, \frac{\partial\theta}{\partial a}\right)}{\left(\frac{\partial\theta}{\partial a}, \frac{\partial^2\theta}{\partial a^2}\right)}.$$

L'expression de l'élément linéaire deviendra donc

(15) $$ds^2 = d\theta^2 + \frac{\left(\theta, \frac{\partial\theta}{\partial a}\right)}{\left(\frac{\partial\theta}{\partial a}, \frac{\partial^2\theta}{\partial a^2}\right)}\left(d\frac{\partial\theta}{\partial a}\right)^2;$$

et, *sous cette forme nouvelle, il ne reste aucune trace de l'expression primitive de cet élément; la formule ne contient que* θ *et ses dérivées.*

Nous signalerons également les formules

(16) $$ds^2 = d\theta^2 + \frac{1}{\Delta\frac{\partial\theta}{\partial a}}\left(d\frac{\partial\theta}{\partial a}\right)^2,$$

(17) $$\sigma^2\left(\theta, \frac{\partial\theta}{\partial a}\right)^2 = EG - F^2,$$

que l'on déduira aisément des relations (2); mais elles se distinguent de la précédente en ce qu'elles contiennent à la fois les coefficients E, F, G et les dérivées de θ.

La combinaison des formules (14) et (17) nous donne la relation nouvelle

$$(18)\qquad \frac{\left(\theta, \dfrac{\partial\theta}{\partial a}\right)^3}{\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial a}, \dfrac{\partial^2\theta}{\partial a^2}\right)} = \mathrm{EG} - \mathrm{F}^2;$$

et, si l'on prend la dérivée logarithmique des deux membres par rapport à a, on obtient l'équation

$$(19)\qquad 3\left(\theta, \frac{\partial^2\theta}{\partial a^2}\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial a}, \frac{\partial^2\theta}{\partial a^2}\right) - \left(\theta, \frac{\partial\theta}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial a}, \frac{\partial^3\theta}{\partial a^3}\right) = 0,$$

qui ne contient plus E, F, G. Cette relation, à laquelle on pourrait parvenir de différentes manières, doit être regardée comme une équation aux dérivées partielles du troisième ordre à laquelle doit satisfaire θ, considérée comme fonction des variables u, v et a. Son intégration complète ferait donc connaître toutes les surfaces sur lesquelles on saura déterminer les lignes géodésiques.

533. Supposons l'élément linéaire de la surface exprimé en fonction des variables θ et $\theta_1 = \dfrac{\partial\theta}{\partial a}$. Nous avons vu (n° 524) que l'expression de la courbure totale sera donnée par la formule de Gauss

$$\frac{\sigma}{\mathrm{RR}'} = -\frac{\partial^2\sigma}{\partial\theta^2}.$$

Dans l'étude approfondie du plus court chemin entre deux points d'une surface, nous aurons à considérer l'équation différentielle du second ordre

$$(20)\qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2} + \frac{\omega}{\mathrm{RR}'} = 0.$$

La formule précédente nous fait connaître une première intégrale particulière

$$\omega = \sigma$$

de cette équation. Une autre intégrale sera donc donnée par la formule

$$\sigma\int\frac{d\theta}{\sigma^2},$$

où l'on effectue la quadrature en supposant θ_1 constant. On aura

donc

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\,du + \frac{\partial\theta_1}{\partial v}\,dv = 0;$$

si l'on remplace, dans l'expression (14) de σ, $\frac{\partial\theta_1}{\partial u}$, $\frac{\partial\theta_1}{\partial v}$ par les quantités proportionnelles $-dv$, du, il vient

$$\sigma^2 = -\frac{d\theta}{d\dfrac{\partial^2\theta}{\partial a^2}}$$

et, par suite,

$$-\sigma\int\frac{d\theta}{\sigma^2} = \sigma\int d\frac{\partial^2\theta}{\partial a^2} = \sigma\frac{\partial^2\theta}{\partial a^2}.$$

La deuxième intégrale de l'équation linéaire (20) sera donc

$$\omega = \sigma\frac{\partial^2\theta}{\partial a^2}, \tag{21}$$

comme on peut le vérifier directement.

536. Les propositions que nous venons d'établir ont été obtenues par la considération des systèmes orthogonaux formés avec une famille de lignes géodésiques. En terminant ce Chapitre, nous indiquerons rapidement une méthode toute différente, qui repose sur le calcul des variations et qui offre l'avantage de bien mettre en évidence un élément très important dans la théorie des lignes géodésiques.

Considérons un segment de ligne géodésique terminé à deux points M, M_0. Si les coordonnées u et v d'un point quelconque de ce segment sont exprimées en fonction d'une autre variable t, la longueur θ de ce segment sera donnée par la formule

$$\theta = \int_{M_0}^{M}\sqrt{E u'^2 + 2F u'v' + G v'^2}\,dt,$$

u' et v' désignant les dérivées de u et de v.

Si les points M, M_0 se déplacent en décrivant des courbes quelconques, l'application des méthodes du calcul des variations nous donnera immédiatement la variation de θ par la formule

$$\delta\theta = \left[\frac{(E u' + F v')\,\delta u + (F u' + G v')\,\delta v}{\sqrt{E u'^2 + 2F u'v' + G v'^2}}\right]_{M_0}^{M}, \tag{22}$$

la notation précédente indiquant qu'il faut prendre la différence des valeurs de l'expression pour les points M et M_0. D'après la relation (10), déjà donnée [I, p. 154], on peut écrire la valeur de θ sous la forme

$$\delta\theta = \Big[\delta s \cos(ds, \delta s)\Big]_{M_0}^{M}, \tag{23}$$

et l'on retrouve ainsi, par une voie entièrement analytique, la relation déjà établie au n° 525. Mais nous allons envisager d'autres conséquences de l'équation (22).

Soient u, v; u_0, v_0 les coordonnées des points M, M_0. La valeur de θ peut évidemment s'exprimer en fonction de u, v, u_0, v_0; ce sera même, d'après les résultats du n° 518, une fonction parfaitement déterminée de ces quatre variables tant que les points M et M_0 seront suffisamment voisins, si l'on convient de prendre la ligne géodésique la plus courte réunissant les deux points. Nous désignerons dans la suite cette fonction θ sous le nom de *distance géodésique des deux points* M, M_0.

Or, si l'on désigne par E_0, F_0, G_0 les valeurs de E, F, G au point M_0, c'est-à-dire pour $u = u_0$, $v = v_0$, la formule (22) peut être écrite comme il suit :

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta\theta = {} & \frac{(E u' + F v')\,\delta u + (F u' + G v')\,\delta v}{\sqrt{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2}} \\ & - \frac{(E_0 u'_0 + F_0 v'_0)\,\delta u_0 + (F_0 u'_0 + G_0 v'_0)\,\delta v_0}{\sqrt{E_0 u_0'^2 + 2F_0 u'_0 v'_0 + G_0 v_0'^2}}, \end{aligned} \right.$$

et elle nous donne, par conséquent, les quatre équations

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial u} &= \frac{E u' + F v'}{\sqrt{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2}} = E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}, \\ \frac{\partial\theta}{\partial v} &= \frac{F u' + G v'}{\sqrt{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2}} = F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds}, \end{aligned} \right.$$

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial u_0} &= -\frac{E_0 u'_0 + F_0 v'_0}{\sqrt{E_0 u_0'^2 + 2F_0 u'_0 v'_0 + G_0 v_0'^2}} = -E_0\left(\frac{du}{ds}\right)_0 - F_0\left(\frac{dv}{ds}\right)_0, \\ \frac{\partial\theta}{\partial v_0} &= -\frac{F_0 u'_0 + G_0 v'_0}{\sqrt{E_0 u_0'^2 + 2F_0 u'_0 v'_0 + G_0 v_0'^2}} = -F_0\left(\frac{du}{ds}\right)_0 - G_0\left(\frac{dv}{ds}\right)_0, \end{aligned} \right.$$

d'où l'on déduit immédiatement, en éliminant u', v' et u'_0, v'_0, les

deux équations

$$(27)\qquad \begin{cases} \Delta\theta = 1, \\ \Delta_0\theta = 1, \end{cases}$$

Δ_0 désignant le symbole Δ où l'on a remplacé u, v par u_0, v_0 et $\frac{\partial\theta}{\partial u}$, $\frac{\partial\theta}{\partial v}$ par $\frac{\partial\theta}{\partial u_0}$, $\frac{\partial\theta}{\partial v_0}$.

Telles sont les propriétés de la *distance géodésique* θ. Lorsqu'on connaîtra cette fonction, les deux équations (26), qui se réduisent à une seule en vertu de la seconde des formules (27), donneront, sous la forme la plus élégante, l'équation de la ligne géodésique qui passe par le point (u_0, v_0) et y admet une tangente déterminée. L'équation

$$\theta = \text{const.}$$

représentera les trajectoires orthogonales de toutes les lignes géodésiques passant par le point (u_0, v_0).

537. Une fois obtenue l'équation

$$(28)\qquad \Delta\theta = 1,$$

on pourra traiter le problème des lignes géodésiques comme tout autre problème de Mécanique et lui appliquer, sans aucune modification, les méthodes d'Hamilton et de Jacobi. On retrouvera ainsi tous les résultats précédents. Nous étudierons d'une manière approfondie, dans les Chapitres suivants, les relations qui se présentent ici entre la théorie des lignes géodésiques et les méthodes de la Mécanique analytique; et nous nous contenterons maintenant d'indiquer comment on détermine la distance géodésique lorsqu'on connaît une intégrale complète, d'ailleurs quelconque, de l'équation aux dérivées partielles (28).

Soit

$$\theta = f(u, v, a)$$

cette solution. Les lignes géodésiques de la surface qui passent par le point (u_0, v_0) seront déterminées par l'équation

$$(29)\qquad \frac{\partial}{\partial a} f(u, v, a) = \frac{\partial}{\partial a} f(u_0, v_0, a),$$

et leur arc compris entre les points (u_0, v_0), (u, v) aura pour ex-

pression (n° 532)

$$\theta = f(u, v, a) - f(u_0, v_0, a). \tag{30}$$

Il suffira de porter dans cette expression la valeur de a tirée de l'équation (29) pour obtenir la distance géodésique cherchée. Ainsi :

Lorsqu'on connaîtra une intégrale avec constante

$$\theta = f(u, v, a)$$

de l'équation

$$\Delta\theta = 1,$$

la distance géodésique des deux points (u, v), (u_0, v_0) *s'obtiendra en éliminant a entre l'équation*

$$\theta = f(u, v, a) - f(u_0, v_0, a)$$

et sa dérivée par rapport à a.

Cette proposition pourrait aussi être établie par la Géométrie ; car la règle qui y est indiquée revient à prendre l'enveloppe de toutes les courbes parallèles

$$f(u, v, a) = \text{const.}$$

qui passent à une même distance θ du point (u_0, v_0).

CHAPITRE VI.

ANALOGIES ENTRE LA DYNAMIQUE DES MOUVEMENTS DANS LE PLAN ET LA THÉORIE DES LIGNES GÉODÉSIQUES.

Équations du mouvement dans le plan. — Définition d'une famille de trajectoires. — Équation aux dérivées partielles de Jacobi. — Usage que l'on peut faire d'une solution particulière, d'une solution complète. — Théorèmes fondamentaux de Jacobi. — Détermination des solutions de l'équation aux dérivées partielles par différentes conditions initiales. — Des systèmes orthogonaux formés avec une famille de trajectoires. — Application au mouvement des corps pesants. — Théorème de MM. Thomson et Tait. — Principe de la moindre action pour le cas des mouvements plans. — Principe d'Hamilton. — Correspondance établie entre le plan et une surface de telle manière que les trajectoires du mobile dans le plan correspondent à des lignes géodésiques de la surface. — La solution de tout problème de Mécanique fait connaître une infinité de systèmes orthogonaux dans le plan. — Brachistochrones. — Quelques résultats généraux relatifs aux cas où l'on associe des trajectoires qui ne correspondent pas à une même valeur de la constante des forces vives. — Généralisation de ces résultats et application à la théorie des surfaces minima.

---

538. Dans les deux Chapitres précédents, nous avons établi un ensemble de propriétés des lignes géodésiques. Nous les avons définies d'abord par la propriété de leur plan osculateur, ce qui revient à les considérer comme les trajectoires d'un point qui se meut sur la surface sans être soumis à l'action d'aucune force; puis, par des considérations entièrement élémentaires, nous avons rattaché à cette définition les propriétés d'orthogonalité et de minimum. Il nous a paru intéressant d'appliquer la même méthode à l'étude de tous les problèmes de Mécanique dans lesquels il existe une fonction des forces. Pour mettre en évidence la simplicité des raisonnements, nous commencerons par les mouvements qui s'effectuent dans un plan.

On a alors les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2(U + h), \tag{2}$$

dont la dernière est l'intégrale des forces vives. *Si nous regardons la constante des forces vives comme donnée,* les intégrales des équations précédentes admettent seulement deux constantes arbitraires, en dehors de celle que l'on peut ajouter au temps. En d'autres termes, la trajectoire du point matériel sera déterminée par la condition de passer par un point et d'y avoir une tangente donnée. En effet, si l'on compte le temps à partir du moment où le mobile passe en ce point, la condition énoncée détermine les valeurs initiales de x, y, $\frac{dy}{dx}$; et, comme l'équation des forces vives donne les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ en fonction de $\frac{dy}{dx}$, on peut calculer les valeurs initiales de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$. Le mouvement est donc complètement déterminé. Remarquons que l'on a pour $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ deux systèmes de valeurs égales et de signes contraires, qui correspondent à la même trajectoire, parcourue dans les deux sens.

On peut, du reste, obtenir par un calcul facile l'équation différentielle des trajectoires. On trouve, en effet, en combinant les équations (1),

$$dx\, d^2y - dy\, d^2x = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\, dx - \frac{\partial U}{\partial x}\, dy\right) dt^2,$$

et, en remplaçant dt^2 par sa valeur tirée de l'équation des forces vives,

$$(3)\qquad dx\, d^2y - dy\, d^2x = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\, dx - \frac{\partial U}{\partial x}\, dy\right) \frac{dx^2 + dy^2}{2(U+h)}.$$

Cette relation ne change pas de forme, on le reconnaît aisément, quand le temps cesse d'être la variable indépendante; elle constitue donc l'équation différentielle des trajectoires qui correspondent à une valeur donnée de la constante des forces vives. Comme elle est du second ordre, on voit que les trajectoires dépendront de deux constantes seulement; mais elle est de plus linéaire par rapport aux différentielles du second ordre et, par conséquent, une trajectoire sera pleinement déterminée par la condition de passer en un point et d'y avoir une tangente donnée.

Parmi tous les mouvements correspondants à une même valeur de h, considérons tous ceux dont les trajectoires satisfont à une

condition, par exemple passent par un point, sont normales à une courbe, etc. Ces trajectoires formeront une famille de courbes qui dépendra d'un seul paramètre; il en passera un nombre limité par chaque point du plan. Soit

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

l'équation différentielle de cette famille de courbes. En tenant compte de l'équation des forces vives, on pourra exprimer $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ en fonction de x et de y; on aura

$$\frac{dx}{N} = \frac{dy}{-M} = \frac{dt\sqrt{2(U+h)}}{\sqrt{N^2+M^2}}.$$

On peut donc considérer $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ comme des fonctions de x et de y. En les substituant dans les équations (1) et (2) et en les désignant, pour abréger, par x' et y', on aura

(4)
$$x'^2 + y'^2 = 2(U+h),$$
$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{dy'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y};$$

ou, en remarquant que x', y' sont exprimées en fonction de x et de y,

(5)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial x}x' + \frac{\partial x'}{\partial y}y' &= \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{\partial y'}{\partial x}x' + \frac{\partial y'}{\partial y}y' &= \frac{\partial U}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

L'équation (4) nous fournit, par la différentiation, les valeurs suivantes de $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x'\frac{\partial x'}{\partial x} + y'\frac{\partial y'}{\partial x}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = x'\frac{\partial x'}{\partial y} + y'\frac{\partial y'}{\partial y}.$$

Si nous portons ces valeurs dans les équations (5), nous aurons

$$y'\left(\frac{\partial x'}{\partial y} - \frac{\partial y'}{\partial x}\right) = 0, \qquad x'\left(\frac{\partial x'}{\partial y} - \frac{\partial y'}{\partial x}\right) = 0.$$

Ces deux équations, qui se ramènent l'une à l'autre, expriment que x', y', considérées comme fonctions de x et de y, sont les dé-

rivées d'une même fonction. On peut donc poser

$$x' = \frac{\partial\theta}{\partial x}, \qquad y' = \frac{\partial\theta}{\partial y}, \tag{6}$$

et θ devra satisfaire à l'*unique* équation

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 = 2(U + h). \tag{7}$$

Les équations (6) nous montrent que les trajectoires du mobile coupent à angle droit toutes les courbes $\theta = \text{const.}$ Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Étant donnée une famille quelconque de trajectoires du mobile, les courbes qui les coupent à angle droit sont définies en égalant à une constante une solution de l'équation (7) *et les composantes de la vitesse du mobile sont données en chaque point par les formules* (6).

Réciproquement, toute solution de l'équation (7) définit une famille de trajectoires qu'on obtiendra par l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}\,dx - \frac{\partial\theta}{\partial x}\,dy = 0. \tag{8}$$

539. Si l'on n'a qu'une solution particulière, sans constante arbitraire, de l'équation aux dérivées partielles, on n'obtiendra qu'une famille de trajectoires. Pour trouver toutes les trajectoires du mobile, il faut donc connaître une solution θ contenant au moins une constante arbitraire. Nous allons montrer ici encore qu'étant donnée une telle solution il n'y aura aucune intégration à faire pour obtenir toutes les trajectoires.

Soit, en effet,

$$\theta = f(x, y, a)$$

une solution de l'équation (7), contenant une constante arbitraire a qui figure dans l'une au moins des deux dérivées $\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}$. On aura, en différentiant l'équation (7) par rapport à a,

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial a\,\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial^2\theta}{\partial a\,\partial y} = 0. \tag{9}$$

Cette équation exprime que les courbes

$$\theta = \text{const.}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial a} = \text{const.}$$

se coupent à angle droit. Donc les trajectoires du mobile auront pour équation

$$(10) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial a} = a'.$$

On le verrait encore en remarquant que l'identité (9) peut aussi s'écrire

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial a\,\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2\theta}{\partial a\,\partial y}\frac{dy}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta}{\partial a}\right).$$

Différentions maintenant l'équation (7) par rapport à h, nous aurons

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial h\,\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial^2\theta}{\partial h\,\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y} = 1,$$

ou encore, en vertu des équations (6),

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial h\,\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2\theta}{\partial h\,\partial y}\frac{dy}{dt} = 1.$$

L'intégration des deux membres nous donne

$$(11) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial h} = t + \tau,$$

τ désignant une constante arbitraire. On reconnaît les propositions fondamentales de Jacobi.

En résumé, si l'on veut déterminer le mouvement défini par les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y},$$

on considérera l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 = 2U + 2h.$$

Toute intégrale de cette équation, égalée à une constante, donnera une famille de courbes dont les trajectoires orthogonales seront des trajectoires du mobile correspondantes à la valeur h de la constante des forces vives, et que l'on obtiendra en intégrant

les deux équations

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial x}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial y}.$$

Mais, si l'on connaît une intégrale de l'équation aux dérivées partielles contenant une constante a, on aura les équations finies de la trajectoire et le temps par les formules

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = a', \qquad \frac{\partial\theta}{\partial h} = t + \tau.$$

On obtient ainsi l'interprétation géométrique de la méthode de Jacobi. Elle consiste à former des systèmes orthogonaux dont une des familles est composée de différentes trajectoires du mobile, correspondantes toutes à la même valeur de la constante des forces vives.

540. Nous voyons, d'après ce qui précède, que lorsqu'on aura trouvé une solution, contenant une constante arbitraire, de l'équation aux dérivées partielles en θ, on pourra obtenir la solution complète du problème de Mécanique considéré. Réciproquement, si l'on a obtenu par un moyen quelconque les équations en termes finis de toutes les trajectoires correspondantes à une valeur déterminée de h, on peut montrer que toutes les solutions de l'équation aux dérivées partielles s'obtiendront par une simple quadrature. Cherchons, par exemple, celle de ces solutions qui s'annule sur une courbe (C) donnée à l'avance. Nous déterminerons toutes les trajectoires du mobile qui sont normales à la courbe (C) et nous exprimerons x', y' en fonction de x et de y. L'expression

$$x'\,dx + y'\,dy$$

sera, nous l'avons vu, la différentielle exacte d'une fonction de deux variables et la fonction

$$(12) \qquad \theta = \int_{x_0, y_0}^{x, y} (x'\,dx + y'\,dy),$$

où x_0, y_0 désignent les coordonnées d'un point quelconque de la courbe (C), sera évidemment la solution cherchée. Comme on peut prendre pour x', y' deux systèmes de valeurs égales et de

signes contraires, on aura deux valeurs de θ ne différant que par le signe.

On sait que l'on peut, d'une infinité de manières, ramener l'intégration d'une différentielle à plusieurs variables à celle d'une différentielle ordinaire. Appliquons ici cette remarque. Supposons que l'on se déplace sur la trajectoire normale à la courbe (C) passant par le point (x, y); dans ce cas, x_0, y_0 seront les coordonnées du point de départ de cette trajectoire; on aura

$$x'\,dx + y'\,dy = (x'^2 + y'^2)\,dt = 2(\mathrm{U} + h)\,dt.$$

Calculons l'intégrale

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} 2(\mathrm{U} + h)\,dt,$$

en remplaçant x et y en fonction de t. Le résultat sera une fonction de t et du paramètre qui fixe la position du point (x_0, y_0) sur la courbe (C). Il suffira de l'exprimer en fonction de x et de y seulement pour obtenir la fonction θ. Si l'on suppose que la courbe (C) diminue indéfiniment et se réduise à un point, cette seconde méthode coïncide avec celle qui a été donnée par Jacobi; car alors toutes les trajectoires normales à (C) se transforment dans les trajectoires passant par un point fixe du plan.

541. Les systèmes orthogonaux que nous venons de définir, et dont une des familles est formée d'une série de trajectoires du mobile, jouent un rôle important dans l'étude de certaines questions, comme nous allons le montrer. Mais, auparavant, nous indiquerons comment on peut les obtenir tous sans intégration nouvelle lorsqu'on connaît une solution complète de l'équation aux dérivées partielles (7).

Soit

$$\theta = f(x, y, a) + b \tag{13}$$

une telle solution. Voici la méthode prescrite par Lagrange pour obtenir la solution la plus générale. On posera

$$b = \varphi(a),$$

$\varphi(a)$ désignant une fonction quelconque de a; le résultat de l'éli-

mination de a entre les équations

$$(14) \quad \begin{cases} \theta = f(x, y, a) + \varphi(a), \\ o = \dfrac{\partial f}{\partial a} + \varphi'(a) \end{cases}$$

fournira la solution demandée. Nous pouvons ajouter ici la remarque suivante, que l'on vérifiera aisément. Soit

$$\theta = F(x, y)$$

la solution ainsi obtenue; les trajectoires orthogonales des courbes

$$\theta = \text{const.}$$

seront définies par la seconde des équations (14)

$$(15) \quad \frac{\partial f}{\partial a} + \varphi'(a) = o,$$

où l'on donnera à la constante a toutes les valeurs possibles.

542. Ces points étant admis, supposons que l'on veuille déterminer le système orthogonal dont une des familles est composée des trajectoires normales à une courbe donnée (C).

Ce problème est évidemment équivalent au suivant : « Trouver une solution θ de l'équation aux dérivées partielles qui prenne une valeur constante donnée, zéro par exemple, en tous les points de la courbe (C). » Soit

$$y = \lambda(x)$$

l'équation de cette courbe. Proposons-nous, d'une manière plus générale, de déterminer la fonction θ qui se réduit à une fonction donnée $\mu(x)$ lorsqu'on a

$$y = \lambda(x).$$

En substituant les valeurs de θ et de y dans les équations (14), on trouvera les équations de condition

$$(16) \quad \begin{cases} \mu(x) = f(x, \lambda, a) + \varphi(a), \\ o = \dfrac{\partial f}{\partial a} + \varphi'(a), \end{cases}$$

qui feront connaître la fonction $\varphi(a)$. Il semble au premier abord que, pour résoudre la question posée, il faudra intégrer une équa-

tion différentielle; car, si l'on élimine x entre les deux équations (16), on sera conduit à une équation de la forme

$$\mathfrak{F}(a, \varphi(a), \varphi'(a)) = 0.$$

Mais, si l'on différentie la première des équations (16), on trouvera, en tenant compte de la seconde,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, \lambda, a) + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \lambda'(x) = \mu'(x).$$

Il est aisé de montrer qu'au système (16) on peut substituer le suivant :

$$(17) \qquad \begin{cases} f(x, \lambda, a) + \varphi(a) = \mu(x), \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} \lambda'(x) = \mu'(x). \end{cases}$$

Ces deux systèmes ont, en effet, une équation commune, et la différentiation totale de cette équation nous montre que la seconde équation de chacun d'eux est toujours une conséquence de la seconde équation de l'autre.

Or les deux équations (17) nous donnent, par l'élimination de x, une relation qui fera connaître $\varphi(a)$ en fonction de a. La question proposée est donc résolue.

Il ne sera pas inutile, pour la suite, de remarquer qu'il y a deux intégrales distinctes, et deux seulement, prenant des valeurs données à l'avance en tous les points d'une courbe (C); car, si l'on veut déterminer, en chaque point de la courbe (C), les dérivées par rapport à x de l'intégrale cherchée θ, on devra joindre à l'équation aux dérivées partielles

$$(18) \qquad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + h)$$

la relation

$$(19) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \lambda'(x) = \mu'(x),$$

qui doit avoir lieu pour tous les points de la courbe (C). Or les deux équations précédentes déterminent deux systèmes de valeurs différentes pour les dérivées $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ prises en un point quelconque de (C). Comme une intégrale est entièrement définie

quand on donne sa valeur et celle de ses dérivées premières en tous les points d'une courbe, on voit que la question proposée admettra bien deux solutions et deux seulement.

Dans le cas, que nous avons en vue, où la fonction θ doit avoir une valeur constante, zéro par exemple, en tous les points de la courbe cherchée, on a

$$\mu(x) = 0,$$

les deux solutions obtenues sont égales au signe près et ne peuvent pas être regardées comme réellement distinctes.

543. Comme conséquences des propositions précédentes, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Toutes les fois que l'on connaîtra une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles (7), *on pourra toujours déterminer sans intégration un système orthogonal dont une des familles contiendra une courbe quelconque* (C) *donnée à l'avance. L'autre famille sera formée des trajectoires du mobile qui coupent à angle droit cette courbe* (C) *et correspondent à une même valeur de la constante des forces vives.*

Dans le cas où la courbe (C) deviendrait infiniment petite et se réduirait à un point, on aurait le système orthogonal dont une des familles est composée des trajectoires du mobile qui passent par ce point. Si l'on remarque que, dans ce cas, l'équation (15), qui représente toutes ces trajectoires, doit être vérifiée quand on y remplace x, y par les coordonnées x_0, y_0 du point considéré, on voit que l'on devra avoir

$$\varphi'(a) + \frac{\partial}{\partial a} f(x_0, y_0, a) = 0;$$

et, par suite, on pourra prendre

$$\varphi(a) = -f(x_0, y_0, a).$$

On aura alors

$$\theta = f(x, y, a) - f(x_0, y_0, a),$$

et, d'après la règle donnée au n° 542, il faudra éliminer a entre cette équation et sa dérivée par rapport à a.

Pour donner une application, considérons le mouvement des

corps pesants, dans lequel la fonction des forces est

$$U = g(y + h).$$

L'équation en θ devient ici

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 = 2g(y + h).$$

Elle admet la solution suivante :

$$(20) \qquad \frac{\theta}{\sqrt{2g}} = ax + \int \sqrt{y + h - a^2}\, dy = ax + \frac{2}{3}(y + h - a^2)^{\frac{3}{2}} + b.$$

Pour trouver les courbes coupant à angle droit toutes les trajectoires paraboliques passant par un point fixe, l'origine par exemple, il faudra, d'après la règle précédente, déterminer b par la condition que θ s'annule en ce point; ce qui donne

$$b = -\frac{2}{3}(h - a^2)^{\frac{3}{2}},$$

puis éliminer a entre l'équation (20), où l'on a remplacé b par la valeur précédente, et sa dérivée par rapport à a. On trouve ainsi, après un calcul que nous omettons,

$$(21) \qquad \frac{3\theta}{\sqrt{g}} = \left[2h + y + \sqrt{x^2 + y^2}\right]^{\frac{3}{2}} - \left[2h + y - \sqrt{x^2 + y^2}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Telle est l'équation des trajectoires orthogonales de toutes les paraboles passant par un même point.

544. Considérons d'une manière générale les systèmes orthogonaux que nous venons de définir et dont une des familles est composée de trajectoires du mobile. L'élément linéaire du plan prendra la forme

$$(22) \qquad ds^2 = H^2 d\theta^2 + H_1^2 d\theta_1^2.$$

Si l'on se déplace sur une trajectoire $\theta_1 =$ const., on a

$$(23) \qquad ds^2 = H^2 d\theta^2 = 2(U + h)\, dt^2.$$

D'ailleurs l'équation

$$2(U + h) = \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2$$

peut s'écrire

$$2(U+h) = \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{d\theta}{dt}. \tag{24}$$

En substituant la valeur de $\frac{d\theta}{dt}$ dans la relation (23), nous aurons

$$2H^2(U+h) = 1,$$

$$\frac{1}{H^2} = 2U + 2h.$$

La formule (22) prendra donc la forme

$$2(U+h)ds^2 = d\theta^2 + \sigma^2 d\theta_1^2, \tag{25}$$

dont nous allons déduire plusieurs conséquences.

Nous voyons d'abord que, si l'on considère deux des courbes de paramètre θ

$$\theta = \alpha, \qquad \theta = \beta,$$

et la portion de l'une quelconque des trajectoires du mobile comprise entre ces deux courbes, l'intégrale

$$\int\sqrt{2(U+h)}\,ds = \int d\theta,$$

prise du commencement à la fin de cet arc, sera constante et égale à la différence $\beta - \alpha$ des valeurs de θ. Nous donnerons à l'intégrale précédente le nom d'*action*. Comme la courbe $\theta = \alpha$ peut être choisie arbitrairement, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Étant donnée une courbe quelconque (C) *et les trajectoires du mobile normales à cette courbe, si l'on porte sur ces trajectoires, à partir de leur point d'incidence, des longueurs pour lesquelles l'action ait une valeur donnée à l'avance mais quelconque, le lieu des extrémités de toutes ces longueurs formera une courbe qui sera encore normale à toutes les trajectoires.*

Cette remarquable proposition, qui est due à MM. Thomson et Tait ([1]), est analogue à celle que nous avons donnée au n° 522

([1]) Sir William Thomson and Tait, *Treatise on natural Philosophy*, Vol. I, Part I, p. 353 de la deuxième édition; 1879.

pour les lignes géodésiques. On pourrait, ici encore, la démontrer directement par le calcul des variations et en déduire tous les résultats précédents; on retrouverait ainsi la méthode suivie par Hamilton et par Jacobi.

En particulier, si l'on considère toutes les trajectoires passant par un point A et si l'on détermine sur chacune d'elles un point M, tel que l'action étendue à l'arc AM ait une valeur constante donnée, le lieu des points M sera une courbe normale à toutes les trajectoires.

545. Si l'on rapporte les points du plan au système de coordonnées formé par les trajectoires passant en A et par les courbes qui les coupent à angle droit, l'élément linéaire du plan sera donné par la formule (25), où θ désignera l'action comptée à partir de A. Nous allons déduire de cette remarque une démonstration directe du *principe de la moindre action.*

Ce principe peut être énoncé comme il suit :

Parmi tous les mouvements qui amènent le mobile d'un point A *en un point* M, *la vitesse sur chaque trajectoire étant réglée par l'équation*

$$v^2 = 2(U + h),$$

le mouvement naturel est celui pour lequel l'action, c'est-à-dire l'intégrale

$$\int_A^M \sqrt{2(U+h)}\, ds = \int_A^M v\, ds,$$

est un minimum.

La démonstration est identique à celle que nous avons développée dans le cas des lignes géodésiques. Construisons toutes les trajectoires du mobile correspondantes à la valeur donnée de h, passant au point A; elles donnent naissance à un système orthogonal pour lequel on a

$$2(U+h)\, ds^2 = d\theta^2 + \sigma^2 d\theta_1^2.$$

Cela posé, il est clair que le minimum de l'intégrale

$$\int \sqrt{2U + 2h}\, ds = \int \sqrt{d\theta^2 + \sigma^2 d\theta_1^2},$$

prise entre les points A et M, correspondra au cas où $d\theta_1$ sera nul, le chemin suivi étant la trajectoire qui unit ces deux points. Je n'insiste pas sur toutes les conditions qui doivent avoir lieu pour que la démonstration soit valable; elles sont identiques à celles qui ont été énumérées dans le cas des lignes géodésiques.

546. Le principe d'Hamilton se rapporte à des hypothèses toutes différentes de celles qui interviennent dans le principe de la moindre action. Il concerne l'intégrale

$$\int\left(\frac{ds^2}{2\,dt^2}+\mathrm{U}\right)dt.$$

Le mouvement de la nature est celui pour lequel cette intégrale est maximum ou minimum. *Mais ici le mouvement est comparé à tous ceux qui ont lieu entre les mêmes points* et dans le même temps, *et, de plus, aucune loi n'est imposée à la vitesse.* Nous allons montrer qu'il y a réellement *minimum*.

Si A et M désignent encore les positions extrêmes et si l'on conserve le système orthogonal dont une des familles est composée des trajectoires passant en A, l'intégrale précédente deviendra

$$\int\left[\frac{d\theta^2+\sigma^2\,d\theta_1^2}{4(\mathrm{U}+h)\,dt^2}+\mathrm{U}\right]dt.$$

Nous allons la comparer à celle qui correspond au mouvement naturel, pour lequel θ_1 demeure constant.

Soient θ_0, U_0 les valeurs de θ et de U dans le mouvement naturel, θ, U, θ_0, U_0 étant supposées correspondre à la même valeur du temps; posons

$$\theta=\theta_0+\omega,\qquad \mathrm{U}=\mathrm{U}_0+\mathrm{U}_1.$$

On a, nous l'avons vu,

$$(26)\qquad \frac{d\theta_0}{dt}=2(\mathrm{U}_0+h).$$

L'accroissement de l'intégrale d'Hamilton, quand on passe du mouvement naturel à l'autre, est

$$\int\left[\frac{d\theta^2+\sigma^2\,d\theta_1^2}{4(\mathrm{U}+h)\,dt^2}+\mathrm{U}-\mathrm{U}_0-\frac{d\theta_0^2}{4(\mathrm{U}_0+h)\,dt^2}\right]dt.$$

Remplaçons θ par sa valeur $\theta_0 + \omega$; puis substituons la valeur de $\frac{d\theta_0}{dt}$ déduite de la formule (26). L'accroissement de l'intégrale deviendra

$$\int \left\{ \frac{\sigma^2 \frac{d\theta_1^2}{dt^2}}{4(U+h)} + \frac{\frac{d\omega^2}{dt^2}}{4(U+h)} + \frac{U_0+h}{U+h}\frac{d\omega}{dt} + U_1 - \frac{U_1(U_0+h)}{U+h} \right\} dt$$

ou, après quelques réductions,

$$\int \left\{ \frac{\sigma^2 \frac{d\theta_1^2}{dt^2} + \frac{d\omega^2}{dt^2}}{4(U+h)} + \frac{U_1^2}{U+h} + \frac{d\omega}{dt} - \frac{U_1}{U+h}\frac{d\omega}{dt} \right\} dt.$$

Comme les deux mouvements se font entre les mêmes points et dans le même temps, ω est nul aux deux limites; on peut donc supprimer le terme $\frac{d\omega}{dt}$ et il reste pour l'accroissement de l'intégrale l'expression

$$(27) \qquad \int \left\{ \frac{\sigma^2 \frac{d\theta_1^2}{dt^2}}{4(U+h)} + \frac{\left(\frac{d\omega}{dt} - 2U_1\right)^2}{4(U+h)} \right\} dt.$$

Sous cette forme on voit clairement que l'intégrale d'Hamilton a augmenté. Pour que l'intégrale précédente soit nulle, il faut que l'on ait à chaque instant

$$\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \qquad \frac{d\omega}{dt} = 2U_1$$

ou

$$\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \qquad \frac{d\theta}{dt} = 2(U+h), \qquad \frac{ds}{dt} = \sqrt{2(U+h)},$$

et ces équations caractérisent le mouvement naturel.

547. Nous ne nous étendrons pas davantage sur les principes précédents et nous remarquerons, en terminant, que la démonstration du principe de la moindre action peut se rattacher directement à la théorie des lignes géodésiques de la manière suivante.

x et y étant les coordonnées rectangulaires d'un point du plan, U la fonction des forces et h la constante des forces vives, consi-

dérons la surface dont l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = 2(U + h)(dx^2 + dy^2).$$

Cette surface sera représentée sur le plan *avec conservation des angles ;* mais de plus la correspondance est telle qu'*à toute trajectoire du mobile dans le plan correspond une ligne géodésique de la surface et* vice versa.

Cette proposition s'est déjà présentée plusieurs fois dans les raisonnements précédents. Nous aurions pu l'établir, soit en comparant l'équation différentielle (3) des trajectoires à celle (8) des lignes géodésiques (n° 514), soit en rapprochant l'équation aux dérivées partielles (7) de l'équation (5) (n° 531) dont dépend la recherche des lignes géodésiques. Nous pouvons maintenant la démontrer immédiatement; car, si l'on rapporte les points du plan à un système de coordonnées dont une des familles est formée de trajectoires du mobile, l'élément linéaire du plan sera donné par la formule (25); celui de la surface correspondante aura donc pour expression

$$ds^2 = d\theta^2 + \sigma^2 d\theta_1^2;$$

par suite, les lignes $\theta_1 =$ const., c'est-à-dire les trajectoires du mobile dans le plan, correspondront nécessairement à des géodésiques de la surface; et *vice versa.*

Comme application, considérons le mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance; r désignant la distance au centre fixe, on aura

$$U + h = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}.$$

La surface dont les lignes géodésiques correspondent aux trajectoires du mobile aura pour élément linéaire

$$ds^2 = \left(\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}\right)(dx^2 + dy^2)$$

ou, en passant aux coordonnées polaires r, v,

$$(28) \qquad ds^2 = \left(\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}\right)(dr^2 + r^2 dv^2).$$

Les surfaces de révolution admettant cet élément linéaire sont

définies par les formules

$$(29)\quad \begin{cases} x = m\sqrt{\dfrac{\mu r(2a-r)}{a}}\cos\dfrac{v}{m}, \\ y = m\sqrt{\dfrac{\mu r(2a-r)}{a}}\sin\dfrac{v}{m}, \\ z = \sqrt{\dfrac{\mu}{a}}\displaystyle\int\sqrt{\dfrac{(2a-r)^2-m^2(a-r)^2}{r(2a-r)}}\,dr. \end{cases}$$

Toutes les fois que m sera commensurable, à un point du plan correspondront des points de la surface en nombre limité; et, par suite, toutes les lignes géodésiques qui ne viendront pas rencontrer la limite de la surface seront fermées, comme les ellipses du plan auxquelles elles correspondent.

548. Cette correspondance, établie entre un plan et une surface de telle manière que les trajectoires du plan correspondent aux lignes géodésiques de la surface, met immédiatement en évidence le principe de la moindre action, qui n'est autre chose que la traduction dans le plan de la propriété de minimum relative aux lignes géodésiques; mais elle conduit sans calcul à un grand nombre d'autres propositions. Nous avons vu, par exemple, que, sur une surface, les courbes lieux des points tels que la somme ou la différence de leurs distances géodésiques à deux courbes fixes (C), (C′) soit constante forment un système orthogonal. Ce système peut évidemment se déterminer sans intégration toutes les fois que l'on connaît les deux courbes (C), (C′) et que l'on a l'expression de la distance géodésique de deux points de la surface. On peut même ajouter que, si l'une des deux courbes (C) est donnée, on peut déterminer l'autre (C′) de telle manière que l'une des familles du système orthogonal contienne une courbe (D) donnée à l'avance. En reportant ce résultat dans le plan, nous obtenons la proposition suivante :

Toutes les fois que l'on aura, dans le plan, la solution complète d'un problème de Mécanique et la fonction θ *relative à ce problème, on pourra déterminer, sans intégration nouvelle, une infinité de systèmes orthogonaux dans le plan, contenant une courbe* (D) *donnée à l'avance; les équations qui définissent*

ces systèmes contiendront une fonction arbitraire d'une variable.

Au reste, cette proposition peut se démontrer directement de la manière la plus simple. Soient en effet θ et σ deux solutions quelconques de l'équation aux dérivées partielles (7). On aura

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial(\theta-\sigma)}{\partial x}\,\frac{\partial(\theta+\sigma)}{\partial x}+\frac{\partial(\theta-\sigma)}{\partial y}\,\frac{\partial(\theta+\sigma)}{\partial y}=0.$$

Cette équation exprime que les courbes

$$\theta-\sigma=\text{const.},\qquad \theta+\sigma=\text{const.}$$

se coupent à angle droit et forment les deux familles d'un système orthogonal. Si l'on veut qu'une certaine courbe (D) fasse partie de l'une de ces familles, il suffira de déterminer deux solutions θ, σ de l'équation aux dérivées partielles qui aient la même valeur en chaque point de la courbe (D). On prendra σ arbitrairement, ce qui introduira une fonction arbitraire; θ sera ensuite déterminée par la condition d'avoir la même valeur que σ en tous les points de la courbe (D). Nous savons (n° 542) que θ sera une fonction distincte de σ.

549. Les propositions générales qui précèdent permettent d'établir que l'on pourra déterminer une infinité de systèmes orthogonaux algébriques dont fera partie une courbe algébrique quelconque, donnée à l'avance. Remarquons d'abord qu'il y a une infinité de problèmes de Mécanique pour lesquels l'*action* est une fonction algébrique, c'est-à-dire pour lesquels l'équation

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2=2(\mathrm{U}+h) \tag{30}$$

admet une intégrale complète algébrique. Sans parler même du cas où la fonction des forces est nulle, prenons, par exemple,

$$\mathrm{U}=\mathrm{A}x^{\frac{1}{m}}+\mathrm{B}y^{\frac{1}{n}}, \tag{31}$$

A et B étant des constantes quelconques et m, n deux entiers. On aura la solution complète

$$(32)\qquad \theta = \int\sqrt{2Ax^{\frac{1}{m}} + h + a}\,dx + \int\sqrt{2By^{\frac{1}{n}} + h - a}\,dy,$$

qui est évidemment algébrique. Si l'on applique les méthodes précédentes en employant cette valeur de θ, on voit que toutes les solutions de l'équation (30) assujetties à prendre une valeur algébrique en tous les points d'une courbe algébrique seront algébriques. On pourra donc obtenir une infinité de systèmes orthogonaux algébriques dont fera partie une courbe algébrique donnée. Ces systèmes sont de deux espèces différentes. Les uns, dont l'une des familles sera formée par les trajectoires du mobile qui coupent à angle droit la courbe donnée, sont analogues aux systèmes orthogonaux formés avec une famille de courbes parallèles et leurs normales communes. Les autres seront analogues au système orthogonal formé par les deux familles de courbes lieux des points tels que la somme ou la différence de leurs distances géodésiques à deux courbes fixes (C), (C′) soit constante. Ils contiendront dans leur définition une fonction algébrique arbitraire, alors même que l'on aura assujetti une courbe donnée à l'avance à faire partie de l'une des deux familles du système orthogonal.

550. Il est aisé de voir que la méthode précédente s'étend à l'étude du mouvement d'un point sur une surface et, en général, à tous les problèmes de Mécanique dans lesquels il y a une fonction des forces, la position du système mobile dépendant de *deux* variables seulement. Nous ne développerons pas les calculs, qui seront donnés plus loin lorsque nous traiterons du problème le plus général de la Mécanique; et nous nous contenterons d'indiquer ici d'autres questions de Mécanique dans lesquelles on retrouve les propriétés que nous venons d'étudier.

On doit à différents géomètres (¹) des propriétés des brachisto-

(¹) *Voir*, par exemple, Roger, *Thèse sur les brachistochrones* (*Journal de Liouville*, 1re série, t. XIII, p. 41; 1848).

Andoyer, *Sur la réduction du problème des brachistochrones aux équations canoniques* (*Comptes rendus*, t. C, p. 1577; 1885).

chrones, analogues à celles que Gauss a fait connaître pour les lignes géodésiques. L'explication de ce fait repose sur la remarque suivante.

Proposons-nous de déterminer les brachistochrones sur une surface (Σ). La vitesse du mobile étant donnée par l'équation des forces vives

$$v^2 = U + h,$$

les brachistochrones seront les courbes pour lesquelles l'intégrale

$$\int \frac{ds}{v} = \int \frac{ds}{\sqrt{U+h}},$$

prise entre deux points quelconques de la courbe, sera minimum. Or, si l'on considère la surface (Σ') pour laquelle l'élément linéaire ds' est déterminé par la formule

$$(33) \qquad ds'^2 = \frac{ds^2}{U+h},$$

elle correspondra à la surface (Σ) avec conservation des angles; et les brachistochrones de (Σ) correspondront aux lignes géodésiques de (Σ'), l'arc de chaque géodésique étant égal au temps dans lequel est parcourue la portion correspondante de la brachistochrone. Cette simple remarque permet d'étendre aux brachistochrones toutes les propriétés des lignes géodésiques. On reconnaît ainsi, en particulier, que les brachistochrones satisfont réellement à leur définition et que le temps dans lequel un arc quelconque de ces courbes est parcouru est réellement un minimum, pourvu toutefois que cet arc ne soit pas trop étendu.

On peut aussi assimiler les brachistochrones aux trajectoires dans un mouvement plan; et cette comparaison offre l'avantage de s'étendre d'elle-même aux brachistochrones dans l'espace.

Supposons l'élément de la surface (Σ) ramené à la forme

$$(34) \qquad ds^2 = \lambda(dx^2 + dy^2).$$

L'intégrale qui doit être minimum est

$$\int \frac{\sqrt{\lambda}\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{U+h}}.$$

En vertu du principe de la moindre action, on reconnaît immé-

diatement que les brachistochrones correspondent aux trajectoires d'un mouvement plan dans lequel la fonction des forces U' aurait pour valeur

$$U' = \frac{\lambda}{U + h},$$

la vitesse du mobile étant donnée par la formule

$$(35) \qquad v^2 = 2U',$$

où la constante des forces vives a la valeur particulière zéro.

Des remarques analogues peuvent être faites aussi en ce qui concerne les figures d'équilibre d'un fil flexible et inextensible. Mais nous laisserons ce point à l'examen du lecteur.

551. Dans les développements précédents, nous avons associé seulement celles des trajectoires pour lesquelles la constante des forces vives a la même valeur. Cette restriction est bien d'accord avec l'esprit de la Mécanique moderne, qui attache moins d'importance aux forces qu'à l'*énergie* et qui permet de regarder comme distincts deux problèmes dans lesquels, la fonction des forces étant la même, l'énergie totale est différente. Quoi qu'il en soit, en groupant les trajectoires pour lesquelles la constante des forces vives prend des valeurs différentes, on obtient les résultats suivants que nous allons rapidement signaler.

Considérons des trajectoires quelconques, formant une famille analogue à celles que nous avons définies au n° 538; x' et y' seront encore des fonctions de x et de y; mais la constante h, variant quand on passe d'une trajectoire à l'autre, devra être considérée ici comme une fonction de x et de y. On aura encore les équations

$$(36) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x'\frac{\partial x'}{\partial x} + y'\frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \\ & x'\frac{\partial y'}{\partial x} + y'\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \\ & x'^2 + y'^2 = 2h + 2U. \end{aligned} \right.$$

Mais la différentiation de l'équation des forces vives donnera des résultats différents; il ne faudra plus y regarder h comme une constante indépendante de x et de y. La différentiation donnera

donc les équations

$$(37)\qquad \begin{cases} x'\dfrac{\partial x'}{\partial x}+y'\dfrac{\partial y'}{\partial x}=\dfrac{\partial h}{\partial x}+\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}, \\ x'\dfrac{\partial x'}{\partial y}+y'\dfrac{\partial y'}{\partial y}=\dfrac{\partial h}{\partial y}+\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}. \end{cases}$$

Si l'on élimine $\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}$ entre ces équations et les précédentes, on trouvera

$$y'\left(\frac{\partial y'}{\partial x}-\frac{\partial x'}{\partial y}\right)=\frac{\partial h}{\partial x}.$$

$$x'\left(\frac{\partial y'}{\partial x}-\frac{\partial x'}{\partial y}\right)=-\frac{\partial h}{\partial y}.$$

Posons maintenant

$$(38)\qquad \frac{\partial y'}{\partial x}-\frac{\partial x'}{\partial y}=\lambda;$$

on aura d'abord

$$(39)\qquad y'=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial h}{\partial x},\qquad x'=-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial h}{\partial y};$$

la substitution de ces valeurs de x', y' dans l'équation des forces vives donnera la relation

$$\Delta h=2\lambda^2(h+\mathrm{U}),$$

où Δh désigne le paramètre différentiel de Lamé

$$(40)\qquad \Delta h=\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2,$$

et qui fera connaître λ. On obtient ainsi

$$(41)\qquad y'=\frac{\sqrt{2(h+\mathrm{U})}}{\sqrt{\Delta h}}\frac{\partial h}{\partial x},\qquad x'=-\frac{\sqrt{2(h+\mathrm{U})}}{\sqrt{\Delta h}}\frac{\partial h}{\partial y}.$$

En portant ces valeurs dans la formule (38), qui sert de définition à λ, on trouve l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(42)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{U}+h}}{\sqrt{\Delta h}}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{U}+h}}{\sqrt{\Delta h}}\frac{\partial h}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\Delta h}}{\sqrt{\mathrm{U}+h}},$$

qui définit la fonction h. Lorsqu'on aura une solution quelconque

de cette équation, les courbes

$$h = \text{const.}$$

seront les trajectoires de la famille correspondante, et les équations (41) feront connaître en chacun de leurs points les composantes de la vitesse du mobile. Inversement, si l'on sait déterminer les trajectoires, on saura aussi intégrer l'équation aux dérivées partielles (42). Lorsqu'on aura obtenu, avec deux constantes arbitraires a et b, l'équation générale des trajectoires

$$y = \varphi(x, a, b, h),$$

il suffira d'y remplacer a et b par des fonctions quelconques de h pour obtenir l'intégrale générale de l'équation (42).

Supposons, par exemple, que la fonction des forces soit nulle : les trajectoires seront des lignes droites représentées par l'équation

$$y = ax + b.$$

L'intégrale de l'équation aux dérivées partielles correspondante sera donnée par la formule

$$y = x\varphi(h) + \psi(h),$$

ce qu'il est aisé de vérifier.

Une circonstance particulière donne quelque intérêt aux remarques précédentes. L'équation aux dérivées partielles (42) intervient dans l'étude d'une question de minimum relative à l'intégrale double

$$(43) \qquad \iint \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2} \sqrt{U + h}\, dx\, dy,$$

qui est d'une forme analogue à celle que Riemann a considérée dans le principe de Dirichlet.

Imaginons que la fonction h soit donnée pour tous les points d'un contour fermé limitant une aire plane A. Si l'on exprime que l'intégrale double précédente étendue à tous les points de cette aire est minimum, on sera conduit, en égalant à zéro la variation première, à une équation aux dérivées partielles qui sera précisément l'équation (42).

Ainsi, *à tout problème de Mécanique dans le plan* (et plus

généralement à deux variables indépendantes), *on peut rattacher une propriété de minimum relative à une intégrale double.*

Quelques considérations de Géométrie auxquelles le lecteur suppléera facilement permettent d'ailleurs de déduire cette propriété de minimum du principe de la moindre action.

552. Dans les deux Chapitres suivants, nous associerons seulement des trajectoires pour lesquelles la constante des forces vives aura la même valeur; nous allons donc indiquer ici sans démonstration l'extension que l'on peut donner aux propriétés précédentes. Pour plus de netteté, nous nous contenterons, dans l'énoncé des propriétés généralisées, de considérer les mouvements dans l'espace.

Si l'on cherche à déterminer les fonctions λ et μ de x et de y de manière à rendre minimum l'intégrale triple

$$\left\{\begin{aligned}&\iiint\sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial z}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y}-\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2}\\ &\quad\times\varphi(x, y, z, \lambda, \mu)\,dx\,dy\,dz,\end{aligned}\right.$$

étendue à un volume fermé, les fonctions λ et μ étant assujetties à prendre des valeurs données en tous les points de la surface ou des surfaces qui limitent ce volume, il suffira d'intégrer les équations du mouvement relatives à un problème de Mécanique où la fonction des forces serait $\varphi(x, y, z, \lambda, \mu)$, la constante des forces vives étant nulle et λ et μ étant traitées comme des constantes, puis de remplacer dans les équations générales de la trajectoire les constantes arbitraires par des fonctions quelconques de λ et de μ; on obtiendra ainsi deux équations qui feront connaître λ et μ.

Si l'on cherche la fonction λ qui assure le minimum de l'intégrale triple

$$(45)\qquad \iiint\sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2}\,\varphi(x, y, z, \lambda)\,dx\,dy\,dz,$$

étendue à un volume fermé, λ étant assujettie à prendre des valeurs données en tous les points de la surface qui limite ce volume, les surfaces

$$\lambda = \text{const.}$$

devront être celles pour lesquelles l'intégrale double suivante, où $d\sigma$ désigne l'aire d'un élément de surface,

$$\int\int \varphi(x, y, z, \lambda)\, d\sigma,$$

étendue à la portion de la surface comprise dans un contour donné quelconque, sera un minimum.

En considérant, par exemple, l'intégrale

$$(46) \qquad \int\int\int \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dy\, dz,$$

qui correspond à l'hypothèse $\varphi = 1$, on reconnaîtra que les surfaces $\lambda =$ const. devront être des surfaces minima. On est ainsi conduit au résultat suivant :

Si l'équation

$$\lambda = \text{const.}$$

représente une famille de surfaces minima, λ devra satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$(47) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial\lambda}{\partial x}}{\sqrt{\Delta\lambda}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial\lambda}{\partial y}}{\sqrt{\Delta\lambda}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\frac{\partial\lambda}{\partial z}}{\sqrt{\Delta\lambda}}\right) = 0,$$

où $\Delta\lambda$ est le paramètre différentiel du premier ordre

$$(48) \qquad \Delta\lambda = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2.$$

Ce résultat est dû à Riemann [1], qui a même montré, comme on le vérifie aisément par un calcul direct, que, si l'on a une seule surface représentée par l'équation

$$\lambda = 0,$$

il suffira, pour que la surface soit minima, que l'équation aux dérivées partielles précédentes, au lieu d'être vérifiée identiquement, le soit seulement en vertu de l'équation de la surface.

---

(1) *Riemann's Gesammelte Werke*, p. 311.

La forme précédente (47) de l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima se rattache directement à celle de Lagrange (I, n° 175), que l'on retrouve d'ailleurs immédiatement en supposant l'équation de la surface mise sous la forme

$$z = \varphi(x, y);$$

les remarques par lesquelles nous l'avons obtenue montrent que l'on pourra écrire immédiatement, en coordonnées curvilignes quelconques, l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima; car, si l'élément linéaire de l'espace est donné par la formule

$$ds^2 = H^2\,d\rho^2 + H_1^2\,d\rho_1^2 + H_2^2\,d\rho_2^2, \tag{49}$$

l'intégrale (46) prend la forme

$$\iiint \sqrt{\Delta\lambda}\,HH_1H_2\,d\rho\,d\rho_1\,d\rho_2, \tag{50}$$

et la propriété de minimum, que nous avons signalée sans calcul, conduit à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{H_1H_2}{H}\,\frac{\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}}{\sqrt{\Delta\lambda}}\right) + \frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{HH_2}{H_1}\,\frac{\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1}}{\sqrt{\Delta\lambda}}\right) + \frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{HH_1}{H_2}\,\frac{\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_2}}{\sqrt{\Delta\lambda}}\right) = 0, \tag{51}$$

qui remplace l'équation (47). On pourrait suivre la même méthode si l'on employait des coordonnées curvilignes obliques.

CHAPITRE VII.

APPLICATION DES MÉTHODES PRÉCÉDENTES A L'ÉTUDE DES MOUVEMENTS DANS L'ESPACE.

Équations différentielles du mouvement. — Toutes les trajectoires qui correspondent à une même valeur de la constante des forces vives et sont normales à une surface sont, par cela même, normales à une famille de surfaces. — Équation aux dérivées partielles d'Hamilton et de Jacobi. — Usage que l'on peut faire d'une intégrale complète. — Conditions auxquelles doit satisfaire cette intégrale. — Définition de *l'action*. — Considération de certains systèmes orthogonaux. — Formule relative à la variation de l'action. — Généralisation du théorème de Malus et de Dupin.

---

553. Considérons maintenant les mouvements dans l'espace. Si U désigne la fonction des forces, les équations du mouvement seront

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

$$(2) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2(U + h),$$

x', y', z' désignant les composantes de la vitesse.

Parmi tous les mouvements correspondants à une valeur donnée de la constante des forces vives, étudions en particulier ceux dont les trajectoires passent par un point, ou sont normales à une surface, ou, en général, satisfont à toute condition qui ne laissera subsister que deux constantes arbitraires dans les équations de la trajectoire. Nous aurons alors une congruence de courbes représentées par des équations telles que les suivantes :

$$(3) \qquad \begin{cases} f(x, y, z, a, b) = 0, \\ \varphi(x, y, z, a, b) = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs les composantes de la vitesse en chaque point devront

satisfaire aux deux équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}x'+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial z}z'=0,\\ &\frac{\partial \varphi}{\partial x}x'+\frac{\partial \varphi}{\partial y}y'+\frac{\partial \varphi}{\partial z}z'=0,\end{aligned}\right.$$

qui, jointes à l'équation des forces vives, permettront évidemment de les déterminer, puis de les exprimer, par la substitution des valeurs de a et de b déduites des équations (3), uniquement en fonction de x, y, z.

Supposons que l'on ait obtenu ces expressions. Les équations du mouvement prendront la forme suivante

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x'}{\partial x}x'+\frac{\partial x'}{\partial y}y'+\frac{\partial x}{\partial z}z'=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x},\\ &\frac{\partial y'}{\partial x}x'+\frac{\partial y'}{\partial y}y'+\frac{\partial y'}{\partial z}z'=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y},\\ &\frac{\partial z'}{\partial x}x'+\frac{\partial z'}{\partial y}y'+\frac{\partial z'}{\partial z}z'=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z},\end{aligned}\right.$$

qui est analogue à celle que l'on rencontre dans l'étude du mouvement permanent des fluides; x', y', z' devront aussi satisfaire à l'équation des forces vives.

On peut déduire de cette dernière équation les valeurs de $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}$. On a, par exemple,

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}=x'\frac{\partial x'}{\partial x}+y'\frac{\partial y'}{\partial x}+z'\frac{\partial z'}{\partial x}.$$

En portant cette valeur de $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}$ dans la première équation (5), on obtient la relation

$$x'\frac{\partial x'}{\partial x}+y'\frac{\partial x'}{\partial y}+z'\frac{\partial x'}{\partial z}=x'\frac{\partial x'}{\partial x}+y'\frac{\partial y'}{\partial x}+z'\frac{\partial z'}{\partial x},$$

que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$y'\left(\frac{\partial x'}{\partial y}-\frac{\partial y'}{\partial x}\right)=z'\left(\frac{\partial z'}{\partial x}-\frac{\partial x'}{\partial z}\right).$$

La deuxième et la troisième équation (5) donneront des for-

mules analogues, d'où l'on déduira le système suivant

$$(6)\qquad \frac{\frac{\partial y'}{\partial z}-\frac{\partial z'}{\partial y}}{x'}=\frac{\frac{\partial z'}{\partial x}-\frac{\partial x'}{\partial z}}{y'}=\frac{\frac{\partial x'}{\partial y}-\frac{\partial y'}{\partial x}}{z'},$$

qui contient toutes les relations indépendantes de la fonction des forces entre x', y', z'.

On reconnaît immédiatement que l'on peut satisfaire à ces équations en annulant les numérateurs, c'est-à-dire en supposant que x', y', z' soient les dérivées d'une même fonction θ. Posons donc

$$(7)\qquad x'=\frac{\partial\theta}{\partial x},\qquad y'=\frac{\partial\theta}{\partial y},\qquad z'=\frac{\partial\theta}{\partial z}.$$

Si l'on porte ces valeurs de x', y', z' dans les équations (2) et (5), l'équation (2) prendra la forme

$$(8)\qquad \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2=2\mathrm{U}+2h,$$

et le système (5) se composera des équations que l'on déduit de la précédente en la différentiant par rapport à x, à y ou à z. *Il suffira donc que* θ *satisfasse uniquement à l'équation aux dérivées partielles* (8).

Les équations (7) nous montrent immédiatement quelle est la signification géométrique de la fonction θ. Si l'on considère la famille de surfaces représentée par l'équation $\theta=$ const., θ étant une intégrale quelconque de l'équation (6), les courbes qui sont les trajectoires orthogonales de cette famille de surfaces sont aussi des trajectoires du mobile, et la vitesse du mobile en chaque point est égale à la dérivée $\frac{\partial\theta}{\partial n}$ de θ suivant la normale. En d'autres termes, *il y a un potentiel* θ *pour les vitesses*.

La méthode précédente reposant sur la considération de certaines congruences particulières formées avec les trajectoires du mobile, il est naturel de se demander si elle donnera toutes les solutions du problème de Mécanique, c'est-à-dire toutes les trajectoires possibles. Soit (C) une de ces trajectoires passant au point $\mathrm{M}_0(x_0, y_0, z_0)$ et soient x'_0, y'_0, z'_0 les composantes de la vitesse du mobile en ce point, composantes qui vérifieront néces-

sairement l'équation des forces vives

$$x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2=2U_0+2h.$$

Il y a évidemment une infinité de solutions θ de l'équation (8) dont les dérivées premières $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$, $\frac{\partial\theta}{\partial z}$ prennent les valeurs x'_0, y'_0, z'_0 au point M_0. Considérons l'une quelconque θ' de ces solutions. Les trajectoires orthogonales des surfaces $\theta'=$ const. seront des trajectoires du mobile. Celle de ces trajectoires qui passe au point M_0 coïncidera évidemment avec la courbe (C), les conditions initiales du mouvement étant les mêmes sur l'une et sur l'autre de ces trajectoires.

554. On est encore conduit à la considération des congruences particulières pour lesquelles il y a un potentiel des vitesses par le raisonnement suivant, qui mettra de nouveau en évidence le résultat précédent.

Désignons par λ la valeur commune des rapports (6). On a

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y'}{\partial z}-\dfrac{\partial z'}{\partial y}=\lambda x', \\ \dfrac{\partial z'}{\partial x}-\dfrac{\partial x'}{\partial z}=\lambda y', \\ \dfrac{\partial x'}{\partial y}-\dfrac{\partial y'}{\partial x}=\lambda z', \end{cases}$$

et, par suite, en faisant usage d'une identité bien connue,

$$(10)\qquad \frac{\partial(\lambda x')}{\partial x}+\frac{\partial(\lambda y')}{\partial y}+\frac{\partial(\lambda z')}{\partial z}=0.$$

Cette relation, qui rappelle l'*équation de continuité* de l'Hydrodynamique, vient confirmer l'analogie que nous avons déjà signalée plus haut et sur laquelle, d'ailleurs, nous n'insisterons pas. Si l'on effectue les différentiations, elle prend la forme

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}x'+\frac{\partial\lambda}{\partial y}y'+\frac{\partial\lambda}{\partial z}z'=-\lambda\left(\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial z'}{\partial z}\right);$$

le premier membre, que l'on peut écrire ainsi

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

a une signification très simple; *il exprime la dérivée* $\frac{d\lambda}{dt}$ *de* λ *lorsqu'on se déplace sur une trajectoire du mobile.* Si donc on pose, pour abréger,

$$(11) \qquad \Omega = -\frac{\partial x'}{\partial x} - \frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial z'}{\partial z}$$

on aura

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda\Omega,$$

d'où l'on déduit

$$(12) \qquad \lambda = \lambda_0 e^{\int_{t_0}^{t} \Omega\, dt},$$

λ_0 désignant la valeur de λ pour $t = t_0$. Donc :

Si λ est nul pour un point quelconque d'une trajectoire, il sera nul pour tous les autres points de la même trajectoire.

D'après cela, considérons, parmi les trajectoires du mobile (qui correspondent toujours à une même valeur de la constante des forces vives), celles qui sont normales à une surface (Σ), et remarquons que, par suite de la définition de λ et de l'équation des forces vives, on a

$$(13) \qquad \lambda = \frac{x'\left(\frac{\partial y'}{\partial z} - \frac{\partial z'}{\partial y}\right) + y'\left(\frac{\partial z'}{\partial x} - \frac{\partial x'}{\partial z}\right) + z'\left(\frac{\partial x'}{\partial y} - \frac{\partial y'}{\partial x}\right)}{2(U+h)}.$$

Il résulte de cette expression que λ sera nul pour le point où chaque trajectoire rencontre normalement la surface (Σ). Pour le reconnaître immédiatement, il suffit de remarquer que, les équations différentielles des courbes de la congruence étant

$$(14) \qquad \frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dz}{z'},$$

x', y', z' jouent ici le rôle des quantités X, Y, Z du n° 438.

λ, étant nul pour un point de chaque trajectoire, sera nul par cela même sur toutes les trajectoires, qui seront, par suite, d'après le théorème du numéro cité, normales à une famille de surfaces. Nous retrouvons ainsi la proposition de MM. Thomson et Tait, que nous établirons, d'ailleurs, d'une autre manière :

Toutes les trajectoires du mobile, correspondantes à une

même valeur de la constante des forces vives, qui sont normales à une seule surface, sont, par cela même, normales à toute une famille de surfaces.

Il résulte des raisonnements précédents que, pour obtenir toutes ces familles de surfaces normales à des trajectoires, il faudra intégrer l'équation aux dérivées partielles (8). Nous allons examiner les différentes solutions de cette équation.

555. Nous n'avons qu'à répéter ici ce qui a été dit dans le cas des mouvements plans. Si la solution θ ne contient aucune constante, il faudra, pour avoir les trajectoires correspondantes, intégrer les trois équations (5) ou les équations (14). Mais je vais montrer que, si la solution θ contient, en dehors de la constante qu'on peut toujours lui ajouter, deux autres constantes arbitraires a et b, on peut obtenir sans aucune intégration la solution complète du problème de Mécanique.

Substituons, en effet, θ dans l'équation (8) et prenons la dérivée par rapport à a; nous aurons

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial a\,\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial^2\theta}{\partial a\,\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial^2\theta}{\partial a\,\partial z}=0.$$

Si l'on remplace $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$, $\frac{\partial\theta}{\partial z}$ respectivement par x', y', z', l'équation précédente prend la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta}{\partial a}\right)=0.$$

Donc $\frac{\partial\theta}{\partial a}$ est constant sur chaque trajectoire du mobile. En appliquant le même raisonnement à b, on voit que les équations

$$\frac{\partial\theta}{\partial a}=a',\qquad \frac{\partial\theta}{\partial b}=b',\tag{15}$$

où a', b' désignent deux constantes nouvelles, définissent une trajectoire du mobile. On vérifierait du reste immédiatement que les deux surfaces représentées par chacune des équations précédentes coupent à angle droit toutes les surfaces $\theta=$ const.

En différentiant de même par rapport à h l'équation (8), on

trouvera

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta}{\partial h}\right) = 1,$$

et l'on aura, par suite, en intégrant,

$$(16)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial h} = t + \tau,$$

τ désignant une nouvelle constante.

Les équations (15) et (16), contenant six constantes arbitraires a, b, h, a', b', τ, définissent bien la solution la plus générale du problème posé. En essayant de le démontrer d'une manière plus rigoureuse, on reconnaîtra à quelles conditions doit satisfaire la solution θ qui contient les constantes a, b. Si l'on veut, en effet, déterminer la trajectoire du mobile qui passe au point $M(x, y, z)$, le mobile admettant les vitesses x', y', z', liées nécessairement par l'équation des forces vives, on aura les trois équations

$$x' = \frac{\partial\theta}{\partial x}, \qquad y' = \frac{\partial\theta}{\partial y}, \qquad z' = \frac{\partial\theta}{\partial z},$$

qui se réduisent à deux, en vertu des équations (2), (8), et qui devront pouvoir déterminer a et b en fonction des six quantités données x, y, z, x', y', z'.

Prenons, par exemple, les deux premières. Pour qu'on puisse en déduire généralement des valeurs de a et de b, il faut et il suffit que $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$ soient des fonctions indépendantes l'une de l'autre des variables a et b. Il faudra donc que le déterminant

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}\right)}{\partial(a, b)}$$

soit différent de zéro. En raisonnant de même avec $\frac{\partial\theta}{\partial y}$, $\frac{\partial\theta}{\partial z}$, on est conduit à la conclusion suivante :

La solution θ doit être telle que les deux équations

$$(17)\qquad \frac{\dfrac{\partial^2\theta}{\partial a\,\partial x}}{\dfrac{\partial^2\theta}{\partial b\,\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial^2\theta}{\partial a\,\partial y}}{\dfrac{\partial^2\theta}{\partial b\,\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial^2\theta}{\partial a\,\partial z}}{\dfrac{\partial^2\theta}{\partial b\,\partial z}},$$

qui se réduisent d'ailleurs à une seule, ne soient pas identiquement vérifiées.

On peut encore énoncer cette condition sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

Il ne faut pas que θ, considérée comme fonction de a et de b, satisfasse à une équation du premier ordre

$$F\left(\frac{\partial\theta}{\partial a}, \frac{\partial\theta}{\partial b}, a, b\right) = 0,$$

indépendante de x, y, z.

On peut dire encore que θ, considérée comme fonction de x, y, z, ne doit pas satisfaire à une équation du premier ordre

$$\varphi\left(x, y, z, \frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}\right) = 0,$$

distincte de l'équation (8) et ne dépendant ni de a ni de b.

Supposons, par exemple, que la fonction des forces soit nulle. L'équation (8) sera

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 = 2h,$$

et elle admettra la solution

$$\theta = z\sqrt{2h - 1} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Cette solution ne conviendra pas, bien qu'elle contienne deux constantes. On le reconnaît immédiatement en appliquant un quelconque des trois critériums que nous venons de signaler.

556. Nous voyons ici se présenter un fait nouveau. Dans le plan, toutes les familles possibles de trajectoires du mobile font partie d'un système orthogonal, auquel correspond une certaine solution θ de l'équation aux dérivées partielles de Jacobi. Il n'en est plus de même dans l'espace : on peut certainement associer les trajectoires du mobile en congruences qui admettent des surfaces les coupant à angle droit, nous venons de le démontrer; mais il existe aussi des familles de trajectoires ne possédant pas cette importante propriété.

Ce résultat pouvait être prévu. Considérons, en effet, le cas où

il n'y a pas de force. Les trajectoires correspondantes à une même valeur de h sont les droites de l'espace, parcourues toutes avec la même vitesse. Or on sait bien qu'un système de rayons rectilignes n'est pas toujours formé des normales à une surface. Mais on sait aussi que, si des droites sont normales à une surface, elles le sont encore à une infinité d'autres surfaces. Cette propriété n'est, on le voit, qu'un cas particulier de celle qui appartient aux trajectoires d'un mobile et que nous avons démontrée au n° 554.

Si on laissait de côté les résultats établis dans ce numéro, on pourrait encore démontrer, comme il suit, le théorème de MM. Thomson et Tait.

Étant donnée une surface (Σ), on sait toujours déterminer une solution θ de l'équation de Jacobi qui soit nulle pour tous les points de cette surface. Alors les trajectoires du mobile, qui sont normales à toutes les surfaces $\theta =$ const., seront, en particulier, normales à (Σ). Comme leur ensemble est déterminé par cette dernière condition, la proposition est démontrée.

En particulier, si la surface (Σ) devient infiniment petite et se réduit à un point, on aura toutes les trajectoires passant par ce point. On voit donc que :

Toutes les trajectoires du mobile qui passent en un point quelconque sont normales à une famille de surfaces.

Ici encore, on peut introduire une intégrale analogue à celle que nous avons définie au n° 544. On a

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial\theta}{\partial x}x' + \frac{\partial\theta}{\partial y}y' + \frac{\partial\theta}{\partial z}z' = 2(U+h).$$

Lorsqu'on se déplace sur une trajectoire, l'équation précédente prend la forme

$$(18) \qquad \frac{d\theta}{dt} = 2(U+h),$$

$$(19) \qquad d\theta = 2(U+h)\,dt = \sqrt{2U+2h}\,ds.$$

Il suit de là que la différence des valeurs θ_M, $\theta_{M'}$ de θ relatives à deux points M, M' d'une même trajectoire est exprimée par la

formule

$$(20) \qquad \theta_M - \theta_{M'} = \int_{M'}^{M} \sqrt{2(U+h)}\, ds.$$

L'intégrale qui figure dans le second membre sera appelée, ici encore, l'*action* étendue de M' à M. Les développements donnés par MM. Thomson et Tait montrent toute l'importance de cet élément, qui doit être considéré, au même titre que le travail, dans l'étude des problèmes de Mécanique. La formule précédente donne, en particulier, les théorèmes suivants, analogues à ceux du n° 544 :

Si, sur les trajectoires passant par un point M_0 *ou normales à une surface quelconque, on considère les arcs, comptés à partir du point d'incidence, pour lesquels l'action a une valeur donnée, le lieu des extrémités de tous ces arcs sera normal à toutes les trajectoires.*

557. Nous allons indiquer maintenant comment on pourra employer une intégrale complète

$$(21) \qquad \theta = f(x, y, z, a, b)$$

de l'équation aux dérivées partielles de Jacobi pour résoudre les deux problèmes que nous venons de rencontrer.

D'après la règle de Lagrange, la solution la plus générale de l'équation aux dérivées partielles est fournie par les relations

$$(22) \qquad \begin{cases} \theta = f(x, y, z, a, b) + \varphi(a, b), \\ 0 = \dfrac{\partial f}{\partial a} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial a}, \\ 0 = \dfrac{\partial f}{\partial b} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial b}, \end{cases}$$

entre lesquelles il faudra éliminer a et b.

Si l'on veut que la solution θ soit nulle ou, plus généralement, ait une valeur donnée $\mu(x, y)$, en chaque point d'une surface (Σ), donnée par son équation

$$(23) \qquad z = \lambda(x, y),$$

on remplacera θ par μ et z par λ dans les équations précédentes,

ce qui donnera le système

$$(24)\quad \begin{cases} \mu = f(x, y, \lambda, a, b) + \varphi(a, b), \\ o = \dfrac{\partial f}{\partial a} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial a}, \qquad o = \dfrac{\partial f}{\partial b} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial b}. \end{cases}$$

En différentiant la première relation par rapport à x et à y successivement et tenant compte des deux autres, on aura

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial x} - \dfrac{\partial \mu}{\partial x} = o, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial y} - \dfrac{\partial \mu}{\partial y} = o. \end{cases}$$

L'élimination de x et de y entre ces deux équations et la première des équations (24) fera connaître φ en fonction de a et de b et déterminera, par suite, la solution cherchée.

Si l'on veut avoir la solution θ correspondante à toutes les trajectoires passant par un point (x_0, y_0, z_0), il faudra prendre

$$(26)\quad \varphi = -f(x_0, y_0, z_0, a, b);$$

je me contente d'indiquer ces propositions, qui appartiennent à la théorie des équations aux dérivées partielles et sont analogues à celles qui ont été données plus haut (n^{os} **541** et **542**).

558. Nous sommes conduits par les résultats précédents à envisager les systèmes de coordonnées curvilignes dans lesquels on définirait un point de l'espace par la valeur des trois quantités

$$\theta, \qquad \theta_1 = \frac{\partial \theta}{\partial a}, \qquad \theta_2 = \frac{\partial \theta}{\partial b}.$$

Un point est alors déterminé par l'intersection de trois surfaces appartenant à des familles différentes; les surfaces des familles

$$\theta_1 = \text{const.}, \qquad \theta_2 = \text{const.}$$

sont engendrées par des trajectoires du mobile normales aux surfaces

$$\theta = \text{const.}$$

On aura donc, en considérant x, y, z comme des fonctions

de θ, θ_1, θ_2,

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial x}{\partial \theta_1}+\dfrac{\partial y}{\partial \theta}\dfrac{\partial y}{\partial \theta_1}+\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\dfrac{\partial z}{\partial \theta_1}=0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial x}{\partial \theta_2}+\dfrac{\partial y}{\partial \theta}\dfrac{\partial y}{\partial \theta_2}+\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\dfrac{\partial z}{\partial \theta_2}=0; \end{cases}$$

et, par suite, l'élément linéaire de l'espace sera donné par une équation de la forme

$$ds^2 = H^2\,d\theta^2 + M\,d\theta_1^2 + 2N\,d\theta_1\,d\theta_2 + P\,d\theta_2^2.$$

On trouvera, comme précédemment (n° 544), la valeur de H

$$H^2 = \frac{1}{2U+2h}$$

et, par suite, la valeur de ds^2 pourra s'écrire

$$(28)\quad (2U+2h)\,ds^2 = d\theta^2 + m\,d\theta_1^2 + 2n\,d\theta_1\,d\theta_2 + p\,d\theta_2^2,$$

les quantités m, p, $mp - n^2$ étant essentiellement positives. On peut déduire de cette formule le principe de la moindre action et celui d'Hamilton par des raisonnements analogues à ceux que nous avons développés dans le cas de deux variables. Au lieu d'insister sur ce sujet, qui sera repris d'une manière générale dans le Chapitre suivant, nous indiquerons en terminant une formule importante relative à l'*action*.

559. Reprenons la relation

$$(29)\quad \theta_M - \theta_{M'} = \int_{M'}^{M} \sqrt{2U+2h}\,ds$$

qui donne l'action $\overline{M'M}$ étendue à l'arc M'M d'une trajectoire. Soit

$$\theta = f(x, y, z, a, b)$$

une solution complète de l'équation de Jacobi et soient

$$(30)\quad \frac{\partial \theta}{\partial a} = a', \qquad \frac{\partial \theta}{\partial b} = b'$$

les équations mêmes de la trajectoire considérée. Désignons par x, y, z les coordonnées de M et par x_0, y_0, z_0 celles de M'. On

aura, en vertu des équations (30),

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a} f(x, y, z, a, b) = \dfrac{\partial}{\partial a} f(x_0, y_0, z_0, a, b), \\ \dfrac{\partial}{\partial b} f(x, y, z, a, b) = \dfrac{\partial}{\partial b} f(x_0, y_0, z_0, a, b). \end{cases}$$

Ces deux équations feront connaître a et b en fonction de x, y, z, x_0, y_0, z_0 et permettront, par suite, d'exprimer l'action $\overline{\mathrm{M'M}}$ par une formule

$$(32)\qquad \overline{\mathrm{M'M}} = \theta(x, y, z;\ x_0, y_0, z_0),$$

ne contenant que les coordonnées des points M, M'. Il est important de calculer les dérivées de cette fonction. Or on a

$$\overline{\mathrm{M'M}} = f(x, y, z, a, b) - f(x_0, y_0, z_0, a, b)$$

et, par suite, en différentiant totalement,

$$\begin{aligned} \delta\overline{\mathrm{M'M}} = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z - \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\delta x_0 - \frac{\partial f_0}{\partial y_0}\delta y_0 - \frac{\partial f_0}{\partial z_0}\delta z_0 \\ + \frac{\partial(f - f_0)}{\partial a}\delta a + \frac{\partial(f - f_0)}{\partial b}\delta b. \end{aligned}$$

Comme les coefficients de δa, δb sont nuls en vertu des équations (31), il reste simplement

$$\delta\overline{\mathrm{M'M}} = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z - \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\delta x_0 - \frac{\partial f_0}{\partial y_0}\delta y_0 - \frac{\partial f_0}{\partial z_0}\delta z_0$$

ou, en remplaçant les dérivées de f et f_0 par les vitesses,

$$(33)\qquad \delta\overline{\mathrm{M'M}} = x'\,\delta x + y'\,\delta y + z'\,\delta z - x'_0\,\delta x_0 - y'_0\,\delta y_0 - z'_0\,\delta z_0.$$

Cette relation, d'où la fonction f a complètement disparu, et que l'on peut établir aussi par le calcul des variations, est analogue à celles que nous avons démontrées aux n°s 525 et 540. Elle donne la variation de l'action étendue à un segment de trajectoire M'M (*fig.* 36) lorsqu'on passe à un segment de trajectoire infiniment voisin PP'. On peut lui donner une forme entièrement géométrique. Si M'MP, MM'P' désignent les angles que fait en M, M' la trajectoire avec les déplacements infiniment petits MP,

M′P′, on a évidemment

$$x'\,\delta x + y'\,\delta y + z'\,\delta z = -\mathrm{MP}\,\frac{ds}{dt}\cos\widehat{\mathrm{M'MP}},$$

$$x'_0\,\delta x_0 + y'_0\,\delta y_0 + z'_0\,\delta z_0 = \quad \mathrm{M'P'}\left(\frac{ds}{dt}\right)_0\cos\widehat{\mathrm{MM'P'}}.$$

En remplaçant les vitesses $\frac{ds}{dt}$, $\left(\frac{ds}{dt}\right)_0$ par leurs valeurs déduites de l'équation des forces vives, on aura

$$(34)\qquad \begin{cases} \delta\,\overline{\mathrm{M'M}} = -\,\mathrm{MP}\sqrt{2\mathrm{U_M}+2h}\,\cos\widehat{\mathrm{M'MP}} \\ \qquad\qquad -\,\mathrm{M'P'}\sqrt{2\mathrm{U_{M'}}+2h}\,\cos\widehat{\mathrm{MM'P'}}. \end{cases}$$

Fig. 36.

Cette formule comprend, comme cas particulier, celle qui est relative à la différentielle d'un segment de droite, et elle donne naissance à des conséquences analogues. Nous signalerons seulement la suivante, que le lecteur établira en étendant la méthode donnée au n° 450 pour la démonstration du théorème de Malus.

560. Étant donnée une trajectoire quelconque et une surface (D), on peut imaginer que la trajectoire, à son point de rencontre avec la surface (D), se réfléchisse, ou se réfracte d'après la loi du sinus, de la même manière qu'un rayon lumineux. La loi de la réflexion ou de la réfraction détermine la tangente à la trajectoire réfléchie ou réfractée; et, comme une trajectoire correspondante à une valeur donnée de la constante des forces vives est pleinement définie lorsqu'on connaît un de ses points et la tangente en ce point, on voit que l'on pourra toujours déterminer par une construction géométrique ce que nous appelons la trajectoire réfléchie ou réfractée. Cette définition étant admise, les raison-

nements du n° 450 et l'emploi de la formule (34) nous conduisent au théorème suivant :

Considérons toutes les trajectoires du mobile qui sont normales à une surface (Σ), *et supposons qu'elles se réfléchissent ou se réfractent sur une surface* (D), *les trajectoires réfléchies ou réfractées seront aussi normales à une surface* (Σ_1) *que l'on construira de la manière suivante : Si* M *est le point où la trajectoire est normale à* (Σ), P *celui où elle rencontre* (D), *on prendra sur la trajectoire réfractée un arc* PM′ *tel que l'action, étendue à l'arc* PM′, *soit égale au produit de l'action étendue à l'arc* MP *par la constante* $\frac{-1}{n}$, *n étant l'indice de réfraction.*

561. On peut imaginer des conditions dynamiques qui obligent les trajectoires à se réfléchir ou à se réfracter d'après les lois que nous venons d'indiquer. Supposons, en effet, que, dans le voisinage de la surface (D), la fonction des forces varie brusquement de telle manière qu'elle soit remplacée par

$$n^2(U+h)-h,$$

n étant l'indice de réfraction. Après le passage à travers la surface (D), la loi des trajectoires redeviendra la même; les équations du mouvement (1) et (2) changent, il est vrai; mais il suffit, pour ramener la forme primitive, d'y remplacer dt par $\frac{dt}{n}$. On aura donc les mêmes trajectoires, mais parcourues avec des vitesses qui seront augmentées dans le rapport de l'indice n à l'unité. Pour savoir comment les trajectoires se substituent les unes aux autres dans le voisinage de (D), il suffit d'appliquer le théorème de MM. Thomson et Tait. Si les trajectoires incidentes sont normales à une surface (Σ), elles demeureront normales à toutes les surfaces que l'on obtiendra en prenant à partir de leur point d'incidence sur (Σ) un arc tel que l'action étendue à cet arc ait une valeur donnée. Soient M le point d'incidence pour une des trajectoires, P le point où elle rencontre D, M′ un point de la trajectoire

réfractée. On aura

$$\overline{MP} = \int_{M}^{P} \sqrt{2U + 2h}\, ds,$$

$$\overline{PM'} = n \int_{P}^{M'} \sqrt{2U + 2h}\, ds.$$

Si donc on détermine le point M' par l'équation

$$\int_{M}^{P} \sqrt{2U + 2h}\, ds + n \int_{P}^{M'} \sqrt{2U + 2h}\, ds = \text{const.},$$

on devra obtenir une surface normale aux trajectoires réfractées. Cette condition, combinée avec la formule (34), détermine, on le reconnaîtra aisément, la loi de la réfraction, et l'on retrouve ainsi précisément la loi de Descartes que nous avions admise *a priori*, dans le numéro précédent.

CHAPITRE VIII.

LE PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA DYNAMIQUE.

Équations de Lagrange. — Transformation d'Hamilton. — Définition d'une *famille* de solutions. — Équations aux dérivées partielles qui définissent la famille. — Familles orthogonales. — Équation aux dérivées partielles de Jacobi. — Usage que l'on peut faire de ses différentes solutions. — Expression de la force vive due à M. Lipschitz. — Principe de la moindre action. — Formule de M. Liouville. — Définition de l'*action*. — Expression de l'action élémentaire au moyen d'une intégrale complète de l'équation de Jacobi et de ses dérivées par rapport aux constantes. — Autre méthode d'exposition des résultats précédents; élimination du temps à l'aide du principe des forces vives. — Définition des angles par rapport à une forme quadratique, travaux de M. Beltrami. — Définition et propriétés d'invariance des paramètres différentiels $\Delta\theta$, $\Delta(\theta, \theta_1)$. — Transformations remarquables de la forme quadratique. — Lignes géodésiques de la forme, extension des théorèmes de Gauss. — Application au problème général de la Dynamique.

---

562. Les méthodes que nous avons appliquées dans les deux Chapitres qui précèdent s'étendent d'elles-mêmes à l'étude du problème général de la Mécanique. Il ne sera pas inutile de développer ici ce nouveau mode d'exposition des résultats fondamentaux qui sont dus à Hamilton et à Jacobi; car nous serons ainsi conduits à certaines propriétés générales des formes quadratiques qui éclaireront les résultats précédents et nous seront utiles dans la suite.

Envisageons un problème de Mécanique dans lequel il existe une fonction des forces, que nous supposerons indépendante du temps. Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les variables indépendantes dont dépend la position du système mobile, $q'_1, \ldots, q'_n$ leurs dérivées par rapport au temps et $2T$ la force vive, définie par la formule

$$(1) \qquad 2T = a_{11}q_1'^2 + 2a_{12}q'_1q'_2 + \ldots = \sum\sum a_{ik}q'_iq'_k,$$

où les coefficients a_{ik} sont des fonctions données de $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Le mouvement sera défini par les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 1, 2 \ldots, n). \tag{2}$$

Hamilton a montré que, si l'on introduit les variables auxiliaires

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i} = \sum_k a_{ik} q'_k, \qquad (i = 1, 2 \ldots, n), \tag{3}$$

on peut transformer ces équations de la manière suivante.

Posons

$$H = T - U. \tag{4}$$

On peut exprimer H en fonction des variables p_i, q_k; il suffit, pour cela, de déduire des équations (3) les valeurs de q'_1, q'_2, ..., q'_n et de les porter dans l'expression précédente. Si l'on pose

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

ou, en adoptant la notation de M. Kronecker,

$$D = |a_{ik}|, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

et si l'on désigne par A_{ik} le coefficient de a_{ik} dans le déterminant précédent, les formules (3) nous donnent

$$q'_i = \frac{A_{i1}}{D} p_1 + \ldots + \frac{A_{in}}{D} p_n. \tag{6}$$

Comme on a, d'après le théorème des fonctions homogènes,

$$2T = p_1 q'_1 + \ldots + p_n q'_n, \tag{7}$$

on obtiendra sans difficulté la valeur suivante de T

$$2T = \frac{1}{D} \sum \sum A_{ik} p_i p_k, \tag{8}$$

que l'on peut encore écrire comme il suit

$$2T = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & p_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & p_n \\ p_1 & \ldots & p_n & 0 \end{vmatrix}; \tag{9}$$

et de là on déduit

$$H = T - U = \frac{1}{2D}\sum\sum A_{ik}p_ip_k - U. \tag{10}$$

Une fois connue cette valeur de H, les équations du mouvement se présentent sous la forme *canonique*

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

et l'équation des forces vives

$$T = U + h \tag{12}$$

s'écrit ainsi

$$H = h. \tag{13}$$

Tel est le premier résultat établi par Hamilton.

563. Considérons maintenant toutes les solutions du problème pour lesquelles la constante des forces vives a une valeur donnée h et soient

$$q_i = f_i(c_1, c_2, \ldots, c_{2n-2}, h, t - t_0), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{14}$$

les équations qui font connaître les valeurs des variables q_i en fonction du temps.

Les valeurs des variables p_i définies par les formules (3) seront

$$p_i = a_{i1}\frac{\partial f_1}{\partial t} + a_{i2}\frac{\partial f_2}{\partial t} + \ldots + a_{in}\frac{\partial f_n}{\partial t}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{15}$$

Au lieu de conserver les solutions les plus générales, imaginons que l'on établisse, entre les $2n - 1$ constantes c_i et h, $n - 1$ relations, d'ailleurs quelconques. Par exemple, on annulera $n - 1$ constantes, ou bien l'on considérera l'ensemble des solutions qui correspondent à une même position initiale donnée du système, etc. On obtiendra ainsi des formules contenant seulement $n - 1$ constantes

$$q_i = \varphi_i(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, h, t - t_0), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{16}$$

qui définiront ce que nous appellerons une *famille* de solutions.

On peut éliminer $t - t_0$ et les constantes c_i entre les équations

précédentes et leurs dérivées

$$q'_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad \dots, \quad q'_n = \frac{d\varphi_n}{dt}.$$

On sera ainsi conduit à un système d'équations différentielles

$$(17) \qquad q'_i = \frac{dq_i}{dt} = \Phi_i(q_1, q_2, \dots, q_n, h), \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dont l'intégration permettrait de retrouver les équations (16) et qui peut être considéré comme définissant la famille de solutions au même titre que le système (16). Si l'on porte les valeurs précédentes dans les formules (3), on en déduira des expressions de $p_1, \dots, p_n$ en fonction de $q_1, \dots, q_n$

$$(18) \qquad p_i = \Psi_i(q_1, q_2, \dots, q_n, h),$$

qui pourront tenir lieu du système (17). Nous allons maintenant donner les équations qui déterminent les fonctions Ψ_i.

Considérons d'abord les n équations suivantes

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

du système (11); les p_i étant exprimées en fonction des variables q_i, elles prennent la forme

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial p_i}{\partial q_2} q'_2 + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial q_n} q'_n = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

et, si l'on remplace q'_i par sa valeur $\frac{\partial H}{\partial p_i}$, on trouve

$$(19) \qquad \sum_k \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0.$$

D'autre part, si l'on porte les expressions de $p_1, \dots, p_n$ dans l'équation des forces vives

$$(20) \qquad H = h,$$

on doit obtenir une identité. Il faut donc que la dérivée du premier membre par rapport à q_i devienne nulle, ce qui donne la relation

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0.$$

En la retranchant de l'équation (19), on trouve

$$(21)\qquad \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ainsi les variables p_i, considérées comme fonctions de $q_1, \ldots, q_n$, doivent satisfaire aux équations (20) et (21).

Considérons maintenant le second groupe des équations différentielles (11)

$$(22)\qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Lorsqu'on y aura remplacé les p_i par leurs valeurs, on aura formé un système de n équations différentielles du premier ordre, l'équivalent du système (17), dont l'intégration fera connaître les valeurs de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ en fonction du temps et de $n-1$ constantes arbitraires qui viendront s'ajouter à la constante des forces vives. Toute la difficulté est donc ramenée, on le voit, à déterminer d'abord les expressions de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ satisfaisant aux équations (20) et (21).

564. Le problème étant ainsi transformé, on n'aperçoit nullement que l'on ait fait un pas vers la solution : l'intégration des équations (20) et (21) constitue, en apparence, une question beaucoup plus difficile que celle qu'il s'agissait de résoudre.

Seulement ce problème a des solutions particulières qui sont mises en évidence. On reconnaît, en effet, immédiatement que les équations (21) seront vérifiées si l'on prend pour $p_1, \ldots, p_n$ les dérivées d'une même fonction quelconque θ

$$(23)\qquad p_1 = \frac{\partial \theta}{\partial q_1}, \qquad p_2 = \frac{\partial \theta}{\partial q_2}, \qquad \ldots, \qquad p_n = \frac{\partial \theta}{\partial q_n}.$$

Quant à l'équation (20), si l'on y porte les valeurs précédentes des variables p_i, elle se transformera en une équation aux dérivées partielles qui définira la fonction θ. Si l'on pose, pour abréger,

$$(24)\qquad \Delta\theta = \sum\sum \frac{A_{ik}}{D}\frac{\partial \theta}{\partial q_i}\frac{\partial \theta}{\partial q_k},$$

on trouve ainsi

$$\Delta\theta = 2(U + h), \tag{25}$$

et l'on peut énoncer le théorème suivant :

A chaque intégrale de l'équation aux dérivées partielles (25) *correspond une famille de solutions du problème proposé pour lesquelles h est la constante des forces vives et que l'on déterminera complètement en effectuant l'intégration du système d'équations différentielles.*

$$p_i = \sum_k a_{ik} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{26}$$

D'après les raisonnements que nous venons d'exposer, il est clair que le théorème précédent fournit seulement des famillles particulières de solutions; mais nous verrons, et l'on peut démontrer dès à présent, que ces familles particulières comprendront toutes les solutions possibles du problème proposé. Soit en effet (γ) une telle solution; elle est entièrement définie par les valeurs initiales p_i^0, q_k^0 des variables p_i, q_k, valeurs qui doivent d'ailleurs satisfaire à l'équation des forces vives

$$H = h.$$

Or il existe une infinité de solutions θ de l'équation aux dérivées partielles (25) telles que l'on ait

$$\frac{\partial\theta}{\partial q_i} = p_i^0 \qquad \text{pour} \qquad q_1 = q_1^0, \ldots, q_n = q_n^0.$$

Dans chacune des familles correspondantes, la solution (γ') définie par les valeurs initiales q_i^0 des variables q_i coïncidera avec la solution (γ); car, pour les deux solutions, les valeurs initiales p_i^0, q_k^0 de toutes les variables p_i, q_k seront les mêmes.

565. Nous donnerons le nom de *familles orthogonales* à toutes celles qui sont définies par l'équation (25) et le système (26). Lorsqu'on connaîtra la solution θ, la détermination complète de la famille correspondante exigera l'intégration du système (26).

Cette dernière intégration sera facilitée, et pourra même être rendue inutile, si la solution θ contient un certain nombre de con-

stantes arbitraires. C'est en cela que consiste le théorème fondamental de Jacobi, que nous allons d'abord démontrer.

Soit

$$\theta = f(q_1, \ldots, q_n, c_1, \ldots, c_\lambda, h)$$

une solution de l'équation (25) contenant les constantes arbitraires $c_1, \ldots, c_\lambda$. En différentiant les deux membres de cette équation par rapport à l'une quelconque c_p des constantes précédentes et remarquant que $U + h$ ne contient pas c_p, on trouve

$$\sum\sum \frac{A_{ik}}{D} \frac{\partial\theta}{\partial q_i} \frac{\partial^2\theta}{\partial q_k\,\partial c_p} = 0.$$

D'après la formule (6), l'ensemble des coefficients de $\frac{\partial^2\theta}{\partial q_k\,\partial c_p}$ est précisément q'_k. On aura donc

$$\sum_k \frac{\partial^2\theta}{\partial q_k\,\partial c_p} q'_k = 0$$

ou, plus simplement,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta}{\partial c_p}\right) = 0,$$

et, en intégrant,

$$\frac{\partial\theta}{\partial c_p} = \text{const.} = c'_p.$$

On démontrerait de la même manière l'équation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta}{\partial h}\right) = 1, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial h} = t + \tau.$$

Ainsi :

Si la fonction θ *contient dans son expression les constantes arbitraires* $c_1, c_2, \ldots, c_\lambda$, *les équations*

(27) $$\frac{\partial\theta}{\partial c_1} = c'_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial c_\lambda} = c'_\lambda$$

sont autant d'intégrales du système (26); *de plus, si l'on n'a pas attribué à la constante des forces vives une valeur numérique, l'équation*

(28) $$\frac{\partial\theta}{\partial h} = t + \tau$$

fera connaître le temps.

Si l'intégrale θ *est complète, c'est-à-dire si elle contient*

$n-1$ constantes arbitraires c_p, les équations

$$(29) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial c_1}=c'_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\theta}{\partial c_{n-1}}=c'_{n-1}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial h}=t+\tau$$

donneront l'intégration complète du système (26).

La proposition de Jacobi se trouve ainsi établie.

Ici encore, par des raisonnements analogues à ceux du n° 555, on reconnaîtra à quelles conditions doit satisfaire l'intégrale complète. Il faut que, si on la considère comme fonction des constantes c_p, elle ne satisfasse à aucune équation de la forme

$$F\left(\frac{\partial\theta}{\partial c_1}, \ldots, \frac{\partial\theta}{\partial c_{n-1}}, c_1, \ldots, c_{n-1}, h\right)=0.$$

Cette condition est d'ailleurs équivalente à la suivante : θ, considérée comme fonction de $q_1, \ldots, q_n$, ne doit vérifier aucune équation aux dérivées partielles indépendante des constantes c_p et distincte de l'équation (24).

566. Les équations (29), auxquelles il faut joindre les suivantes

$$(30) \qquad p_1=\frac{\partial\theta}{\partial q_1}, \quad \ldots, \quad p_n=\frac{\partial\theta}{\partial q_n},$$

qui feront connaître les vitesses, définissent la solution la plus générale du problème proposé. Considérons, parmi toutes les solutions, celles qui correspondent à une même position initiale du système mobile. Soient $q_1^0, \ldots, q_n^0$ les valeurs des variables q_i qui définissent cette position et soit

$$\theta=f(q_1, \ldots, q_n, c_1, \ldots, c_{n-1}, h)$$

la solution qui figure dans les formules (30). Nous poserons

$$f_0=f(q_1^0, \ldots, q_n^0, c_1, \ldots, c_{n-1}, h);$$

les équations (29) devant être vérifiées quand on y fait $q_i=q_i^0$, on aura

$$c'_i=\frac{\partial f_0}{\partial c_i};$$

et, par suite, ces équations prendront la forme

$$(31) \qquad \frac{\partial}{\partial c_i}(f-f_0)=0, \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1).$$

En attribuant aux constantes c_i toutes les valeurs possibles dans ces équations, on obtient ainsi ce que nous avons appelé une famille de solutions. *Cette famille est orthogonale;* on peut le montrer de la manière suivante.

D'après la définition même des familles orthogonales, tout revient à établir que l'expression

$$\sum p_i\, dq_i = \sum \frac{\partial f}{\partial q_i}\, dq_i \tag{32}$$

est une différentielle exacte après qu'on y a remplacé les constantes c_i par leurs expressions en fonction de $q_1, \ldots, q_n$ déduites des équations (31). Or, si l'on considère la fonction

$$\sigma = f - f_0,$$

où l'on a remplacé les constantes c_λ par leurs valeurs déduites des équations (31), et si on la différentie totalement, on trouve

$$d\sigma = \sum \frac{\partial f}{\partial q_i}\, dq_i + \sum \frac{\partial (f - f_0)}{\partial c_p}\, \partial c_p.$$

Les coefficients des différentielles dc_p étant nuls en vertu des équations (31), $d\sigma$ devient égal à l'expression (32). La proposition que nous avions en vue est donc établie. Nous la retrouverons plus loin par une voie toute différente.

La solution particulière σ que nous venons d'obtenir, solution que l'on peut exprimer en fonction de $q_1, \ldots, q_n, q_1^0, \ldots, q_n^0$, joue, comme on sait, un rôle fondamental dans la théorie d'Hamilton.

Les raisonnements précédents subsisteraient sans modification si l'on substituait à f_0 une fonction quelconque

$$\varphi(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, h);$$

de sorte que les équations

$$\frac{\partial}{\partial c_p}(f - \varphi) = 0, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n-1)$$

définissent toujours une famille orthogonale. Cette famille correspond à cette solution θ de l'équation aux dérivées partielles que l'on obtient, d'après la règle de Lagrange, en éliminant $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$

entre l'équation

$$0 = f - \varphi$$

et ses dérivées par rapport aux constantes arbitraires.

567. Les remarques précédentes s'appliquent toutes à l'hypothèse où la solution θ contiendrait des constantes arbitraires. Quand il n'en sera pas ainsi, il faudra, pour déterminer la famille de solutions correspondante à la solution θ, intégrer le système (26). Toute intégrale

$$F = \text{const.}$$

de ce système devra satisfaire à l'équation linéaire

$$\sum \frac{\partial F}{\partial q_k} q'_k = \sum\sum \frac{A_{ik}}{D} \frac{\partial \theta}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial q_k} = 0.$$

Nous désignerons, pour abréger, par $\Delta(\theta, F)$ l'expression

$$(33) \qquad \Delta(\theta, F) = \sum\sum \frac{A_{ik}}{D} \frac{\partial \theta}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial q_k}.$$

L'intégration du système (26) équivaut donc à celle de l'équation linéaire

$$(34) \qquad \Delta(\theta, F) = 0.$$

Remarquons que le symbole précédent se réduit à $\Delta\theta$ lorsqu'on y suppose $F = \theta$.

La considération des familles orthogonales va nous conduire à une expression remarquable de la force vive du système mobile qui a été signalée par M. Lipschitz (¹). Soient θ une solution quelconque de l'équation (25) et $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ les $n-1$ intégrales *distinctes* de l'équation linéaire correspondante (34);

$$\theta, \quad \theta_1, \quad \ldots, \quad \theta_{n-1}$$

forment un système de n fonctions indépendantes; car, si θ pouvait

(¹) R. LIPSCHITZ, *Untersuchung eines Problems der Variations-rechnung in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist* (*Journal de Crelle*, t. LXXIV; 1871). On pourra consulter aussi une analyse de ce Mémoire rédigée par l'auteur dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1re série, t. IV, p. 212; 1873.

s'exprimer en fonction de $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$, on aurait

$$\Delta(\theta, \theta) = \Delta\theta = 0,$$

ce qui est impossible, $\Delta\theta$ étant égal à $U + h$. Nous pouvons donc introduire dans la forme quadratique

$$\sum\sum a_{ik}\, dq_i\, dq_k,$$

qui, divisée par dt^2, donnerait la force vive, les variables θ, θ_i à la place des variables q_i. On obtient ainsi une expression

$$(35)\qquad \sum\sum a_{ik}\, dq_i\, dq_k = \mathrm{B}\, d\theta^2 + 2\sum \mathrm{B}_i\, d\theta\, d\theta_i + \sum\sum \alpha_{ik}\, d\theta_i\, d\theta_k;$$

nous allons chercher d'abord les valeurs des coefficients B, B_i.

D'après l'équation précédente, on a

$$(36)\qquad \begin{cases} \mathrm{B} = \sum\sum a_{ik} \dfrac{\partial q_i}{\partial \theta} \dfrac{\partial q_k}{\partial \theta}, \\[2ex] \mathrm{B}_p = \sum\sum a_{ik} \dfrac{\partial q_i}{\partial \theta} \dfrac{\partial q_k}{\partial \theta_p}. \end{cases}$$

Or, lorsque θ varie seule, les équations du mouvement sont vérifiées; cela résulte de ce que $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ sont les intégrales du système (26). On a donc

$$(37)\qquad \frac{\partial q_i}{\partial \theta} = q'_i \frac{dt}{d\theta},$$

$\frac{d\theta}{dt}$ désignant la dérivée de θ par rapport au temps dans le mouvement naturel. On déduit de là

$$\sum_k a_{ik} \frac{\partial q_k}{\partial \theta} = \left(\sum_k a_{ik} q'_i\right) \frac{dt}{d\theta} = p_i \frac{dt}{d\theta}$$

ou encore

$$(38)\qquad \sum_k a_{ik} \frac{\partial q_k}{\partial \theta} = \frac{\partial \theta}{\partial q_i} \frac{dt}{d\theta}.$$

Si l'on multiplie cette équation par $\frac{\partial q_i}{\partial \theta}$ et si l'on ajoute toutes les équations semblables, on aura

$$\sum\sum a_{ik} \frac{\partial q_i}{\partial \theta} \frac{\partial q_k}{\partial \theta} = \left(\sum \frac{\partial \theta}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \theta}\right) \frac{dt}{d\theta},$$

ou, en remarquant que, d'après les formules relatives au changement de variables, le coefficient de $\frac{dt}{d\theta}$ est l'unité,

$$\sum\sum a_{ik}\frac{\partial q_i}{\partial\theta}\frac{\partial q_k}{\partial\theta}=\frac{dt}{d\theta}.$$

L'emploi de la formule (37) nous permet d'éliminer les dérivées $\frac{\partial q_i}{\partial\theta}$ et nous donne

$$\sum\sum a_{ik}q'_i q'_k=\frac{d\theta}{dt},$$

ou, en tenant compte de l'équation des forces vives,

$$\frac{d\theta}{dt}=2(U+h). \tag{39}$$

Telle est la formule qui fera connaître la dérivée de θ dans le mouvement naturel. On en déduit la valeur suivante de B :

$$B=2(U+h)\frac{dt^2}{d\theta^2}=\frac{1}{2(U+h)}.$$

Calculons maintenant la valeur de B_p. Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (38) par $\frac{\partial q_i}{\partial\theta_p}$, on aura, en ajoutant toutes les équations semblables,

$$B_p=\sum\sum a_{ik}\frac{\partial q_i}{\partial\theta}\frac{\partial q_k}{\partial\theta_p}=\frac{dt}{d\theta}\left[\sum_i\frac{\partial\theta}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial\theta_p}\right],$$

et, comme le second membre est évidemment nul d'après les formules relatives au changement de variables, on aura

$$B_p=0.$$

En portant les valeurs de B et de B_p dans l'équation (35), on sera donc conduit à l'identité fondamentale

$$(2U+2h)\sum\sum a_{ik}\,dq_i\,dq_k=d\theta^2+f(d\theta_1,\ldots,d\theta_{n-1}). \tag{40}$$

f désignant une forme quadratique des $n-1$ différentielles $d\theta_1, \ldots, d\theta_{n-1}$ qui sera nécessairement *définie positive*.

568. Telle est la formule établie par M. Lipschitz. On peut en

déduire une démonstration nette et précise du principe de la moindre action. Sous la forme qui lui a été donnée par Jacobi [1], ce principe peut s'énoncer comme il suit :

Étant données deux positions (P_0) *et* (P_1) *du système mobile, imaginons tous les déplacements continus qui amènent le système de la première position à la seconde, les vitesses satisfaisant à chaque instant à l'équation des forces vives*

$$2T = \sum\sum a_{ik} q'_i q'_k = 2(U + h).$$

Si l'on considère l'intégrale

$$(41) \qquad \int_{(P_0)}^{(P_1)} \sum mv^2\, dt = \int_{(P_0)}^{(P_1)} \sqrt{2U + 2h} \sqrt{\sum\sum a_{ik}\, dq_i\, dq_k},$$

relative à chacun de ces déplacements, elle sera moindre pour le mouvement naturel que pour tous les autres déplacements.

Nous verrons plus loin, en effet (n° 571), que la variation première de l'intégrale précédente est toujours nulle lorsqu'on passe du mouvement naturel à tout autre mouvement infiniment peu différent amenant le système de (P_0) en (P_1). Nous allons démontrer ici une proposition plus précise et prouver que l'intégrale sera réellement un minimum lorsque la position (P_1) sera suffisamment voisine de (P_0).

Soit, en effet, (γ) un des mouvements naturels; considérons une famille orthogonale de solutions (F) à laquelle appartiendra le mouvement (γ). On peut, par exemple, choisir toutes les solutions correspondantes à une position initiale (P') qui soit l'une de celles que prend le système dans le mouvement naturel. Constituons un domaine continu de positions, caractérisé, par exemple, par certaines inégalités auxquelles doivent satisfaire q_1, $q_2, \ldots, q_n$, assujetti à l'unique condition que la solution θ de l'équation (25), qui caractérise la famille orthogonale, y reste finie et uniforme, ainsi que ses dérivées premières, sauf peut-être pour une certaine position déterminée (P''). Supposons, de plus, que

[1] *Vorlesungen über Dynamik*, sixième Leçon.

ce domaine comprenne dans son intérieur une partie des positions qu'occupe le système mobile dans le mouvement (γ). Si (P_0) et (P_1) désignent deux de ces positions, nous allons montrer que l'intégrale

$$(42)\qquad \mathfrak{A} = \int_{(P_0)}^{(P_1)} \sqrt{2U + 2h}\sqrt{\sum\sum a_{ik}\, dq_i\, dq_k},$$

à laquelle nous donnerons le nom d'*action*, sera plus petite dans le mouvement naturel que pour tout autre mouvement s'accomplissant, entre les mêmes positions, à l'intérieur du domaine défini plus haut. En effet, il est impossible que deux positions différentes (P_0), (P_1), comprises à l'intérieur du domaine défini, appartiennent à deux solutions distinctes de la famille orthogonale, correspondantes à la détermination de θ que nous avons choisie. S'il en était ainsi, une des deux positions (P_0), (P_1) serait distincte de (P'') et, comme les vitesses relatives à cette position sont déterminées par les équations (26), où les dérivées $\frac{\partial\theta}{\partial q_i}$ ne sont, d'après l'hypothèse, ni infinies, ni indéterminées, il en résulterait que les deux solutions distinctes correspondraient à la même position initiale et aux mêmes vitesses initiales, ce qui est évidemment impossible.

D'après cela, évaluons l'action $\mathfrak{A}$ en nous servant de la formule (40). Nous aurons

$$(43)\qquad \mathfrak{A} = \int_{(P_0)}^{(P_1)} \sqrt{d\theta^2 + f(d\theta_1, d\theta_2, \ldots, d\theta_{n-1})}.$$

Dans le mouvement naturel on a

$$d\theta_1 = d\theta_2 = \ldots = d\theta_{n-1} = 0;$$

et, d'autre part, $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ étant toujours positive d'après la formule (39), θ est une fonction croissante. On aura donc

$$\mathfrak{A} = \int_{(P_0)}^{(P_1)} d\theta = \theta_{(P_1)} - \theta_{(P_0)}.$$

Si l'on considère maintenant tout autre mouvement s'accomplissant dans le domaine défini, il ne peut, d'après la démonstration précédente, réunir les deux positions (P_0), (P_1) et constituer

une solution de la famille orthogonale correspondante à la détermination de θ que nous avons choisie. Par suite, les différentielles $d\theta_1, \ldots, d\theta_{n-1}$ ne seront pas toujours nulles dans ce second mouvement; et, comme f est une forme définie positive, l'intégrale $\mathfrak{A}$, évaluée dans le nouveau mouvement, sera supérieure à

$$\int_{(P_0)}^{(P_1)} \sqrt{d\theta^2}$$

et *a fortiori* à

$$\int_{(P_0)}^{(P_1)} d\theta.$$

Or, la fonction θ étant bien déterminée à l'intérieur du domaine, cette dernière intégrale est toujours $\theta_{(P_1)} - \theta_{(P_0)}$. La proposition que nous avions en vue est donc établie.

Supposons, en particulier, que la famille orthogonale considérée soit celle qui est formée par toutes les solutions qui ont en commun la position initiale (P_0). Soit θ l'intégrale correspondante de l'équation aux dérivées partielles, à laquelle on pourra toujours ajouter une constante, de telle manière qu'elle s'annule pour la position (P_0). Le domaine continu pourra être ici caractérisé par l'inégalité [1]

$$\theta < A,$$

A étant une constante positive choisie par l'unique condition que θ et ses dérivées ne deviennent ni infinies, ni indéterminées à l'intérieur du domaine. Alors l'action, dans le mouvement naturel qui s'effectue à l'intérieur du domaine entre la position (P_0) et une autre position (P_1) comprise dans le domaine, sera un minimum absolu. Car, d'après la démonstration précédente, elle est plus petite que celle qui est relative à tout autre mouvement s'accomplissant dans le domaine; mais elle est aussi inférieure à celle qui se rapporte à tout mouvement sortant des limites, puisque déjà l'action dans ce mouvement, étendue seulement jusqu'à la première position pour laquelle il sort du domaine, est au moins égale à A et, par suite, supérieure à $\theta_{(P_1)}$. Ce raisonnement ne diffère

---

[1] La définition complète et précise de ce domaine exigerait quelques développements qui sont analogues à ceux que nous avons donnés aux nos 518 et 521 relativement aux lignes géodésiques.

que par le nombre des variables de celui que nous avons présenté au n° 521.

569. La démonstration précédente établit donc, sans l'intervention du calcul des variations et par des méthodes purement algébriques, le principe de la moindre action ; sous ce point de vue, elle doit être rapprochée de celle que M. Liouville a fait connaître dans un article inséré en 1856 aux *Comptes rendus* (¹). Nous allons indiquer rapidement une méthode nouvelle qui conduit aux résultats obtenus par l'illustre géomètre.

Désignons par ϖ_i les expressions

$$(44) \qquad \varpi_i = a_{i1}\,dq_1 + a_{i2}\,dq_2 + \ldots + a_{in}\,dq_n,$$

qui sont égales aux quantités p_i multipliées par dt, et considérons la forme quadratique

$$(45) \qquad K = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & \dfrac{\partial\theta}{\partial q_1} & \varpi_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & \dfrac{\partial\theta}{\partial q_n} & \varpi_n \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial q_1} & \ldots & \dfrac{\partial\theta}{\partial q_n} & 0 & 0 \\ \varpi_1 & \ldots & \varpi_n & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On reconnaîtra aisément qu'elle est toujours positive ou nulle et qu'elle ne peut s'annuler que si l'on a

$$\frac{\varpi_1}{\dfrac{\partial\theta}{\partial q_1}} = \frac{\varpi_2}{\dfrac{\partial\theta}{\partial q_2}} = \ldots = \frac{\varpi_n}{\dfrac{\partial\theta}{\partial q_n}}.$$

Cela posé, désignons par les notations b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} les quatre éléments qui sont des zéros et qui appartiennent aux deux dernières lignes et aux deux dernières colonnes. Une formule

---

(¹) J. Liouville, *Expression remarquable de la quantité qui, dans le mouvement d'un système de points matériels à liaisons quelconques, est un minimum en vertu du principe de la moindre action* (*Comptes rendus*, t. XLII, p. 1146, et *Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. I, p. 297 ; 1856).

déjà rappelée (p. 124) nous donnera la relation

$$(46)\qquad K\frac{\partial^2 K}{\partial b_{11}\,\partial b_{22}} = \frac{\partial K}{\partial b_{11}}\,\frac{\partial K}{\partial b_{22}} - \left(\frac{\partial K}{\partial b_{12}}\right)^2.$$

On établit immédiatement, ou par des combinaisons faciles de colonnes, que l'on a

$$\frac{\partial^2 K}{\partial b_{11}\,\partial b_{22}} = D, \qquad \frac{\partial K}{\partial b_{11}} = -D\sum\sum a_{ik}\,dq_i\,dq_k,$$

$$\frac{\partial K}{\partial b_{12}} = -D\,d\theta, \qquad \frac{\partial K}{\partial b_{22}} = -D\,\Delta\theta,$$

D et $\Delta\theta$ étant les expressions déjà définies par les formules (5) et (24). En portant ces valeurs dans l'équation (46), on trouvera

$$\Delta\theta\sum\sum a_{ik}\,dq_i\,dq_k = d\theta^2 + \frac{K}{D}.$$

Si l'on suppose maintenant que θ satisfasse à l'équation

$$\Delta\theta = 2(U+h),$$

on aura

$$(47)\qquad 2(U+h)\sum\sum a_{ik}\,dq_i\,dq_k = d\theta^2 + \frac{K}{D}.$$

Cette équation, qui donne, comme la formule (40), une expression de l'action élémentaire, peut remplacer cette identité et jouerait le même rôle dans la démonstration que nous avons donnée du principe de la moindre action. Au reste, on peut déduire très aisément la première formule de la seconde.

En effet, d'après l'expression (45), on reconnaît immédiatement que K est une fonction quadratique des binômes

$$\varpi_i\frac{\partial\theta}{\partial q_k} - \varpi_k\frac{\partial\theta}{\partial q_i}.$$

Toutes ces quantités, s'annulant lorsqu'on se déplace sur une trajectoire, en vertu des équations différentielles (26), seront nécessairement de la forme

$$P_1\,d\theta_1 + \ldots + P_{n-1}\,d\theta_{n-1};$$

$\frac{K}{D}$ sera donc une forme quadratique des différentielles $d\theta_1, d\theta_2, \ldots, d\theta_{n-1}$. Cette remarque suffit à montrer que l'équation (40) est une conséquence de la formule (47).

570. Nous négligerons ici ce qui concerne le principe d'Hamilton. Il suffirait, pour établir ce principe et reconnaître qu'il y a réellement un minimum de l'intégrale correspondante, de répéter la démonstration du n° 546, en substituant partout au terme $\sigma^2\, d\theta_1^2$ la fonction $f(d\theta_1, \ldots, d\theta_{n-1})$ qui figure dans la formule (40). Nous insisterons, au contraire, sur la généralisation suivante d'un résultat établi au n° 534.

Lorsqu'on connaîtra une intégrale complète θ de l'équation (25), on pourra prendre pour les fonctions $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ les dérivées de θ par rapport aux constantes c_i. Posons

$$\theta_i = \frac{\partial\theta}{\partial c_i},$$

$$\theta_{ik} = \frac{\partial^2\theta}{\partial c_i\, \partial c_k};$$

nous allons voir que l'on peut exprimer entièrement le second membre de la formule (40) en fonction de θ et de ses dérivées.

Remplaçons partout dans cette formule la caractéristique d par $d + \lambda\delta$ et égalons les coefficients de λ dans les deux membres; nous aurons la relation

$$(48) \qquad 2(\mathrm{U} + h)\sum\sum a_{ik}\, dq_i\, \delta q_k = d\theta\, \delta\theta + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial f}{\partial\, d\theta_i}\delta\theta_i,$$

qui est équivalente à l'équation d'où on l'a déduite, mais qui contient deux systèmes de différentielles. Les deux membres peuvent être considérés comme dépendant des $4n - 1$ variables q_i, dq_k, $\delta q_{k'}$, c_λ. Laissant toutes les autres variables constantes, différentions par rapport à c_λ. En remarquant que le premier membre ne contient pas c_λ et que l'on a, généralement,

$$\frac{\partial}{\partial c_\lambda} du = d\frac{\partial u}{\partial c_\lambda},$$

nous trouverons le résultat suivant

$$\begin{aligned} 0 = d\theta_\lambda\, \delta\theta + d\theta\, \delta\theta_\lambda &+ \frac{1}{2}\sum \frac{\partial f}{\partial\, d\theta_i}\delta\theta_{i\lambda} \\ &+ \frac{1}{2}\sum \frac{\partial f}{\partial\, \delta\theta_i} d\theta_{i\lambda} + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 f}{\partial c_\lambda\, \partial\, d\theta_i}\delta\theta_i. \end{aligned}$$

Cela posé, choisissons pour les différentielles $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$ des valeurs annulant $\delta\theta_1, \delta\theta_2, \ldots, \delta\theta_{n-1}$. Si l'on pose

$$(49)\qquad (\text{o}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\theta}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial\theta}{\partial q_n} \\ \frac{\partial\theta_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial\theta_1}{\partial q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\theta_{n-1}}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial\theta_{n-1}}{\partial q_n} \end{vmatrix},$$

les valeurs de $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$ seront proportionnelles aux coefficients de $\frac{\partial\theta}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial\theta}{\partial q_n}$ dans le déterminant précédent. Si l'on désigne par la notation (ik) ce que devient ce déterminant lorsqu'on y remplace θ par θ_{ik}, l'équation précédente nous donnera

$$(50)\qquad \text{o} = (\text{o})\, d\theta_\lambda + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial f}{\partial\, d\theta_i}(i\lambda), \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-1),$$

tous les autres termes disparaissant en vertu de l'hypothèse faite sur $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$. Si l'on joint aux équations précédentes l'identité

$$f = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial f}{\partial\, d\theta_i}\, d\theta_i,$$

on pourra éliminer toutes les dérivées $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial\, d\theta_i}$ et obtenir l'équation

$$\begin{vmatrix} (1,1) & \cdots & (1, n-1) & d\theta_1 \\ (2,1) & \cdots & (2, n-1) & d\theta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n-1, 1) & \cdots & (n-1, n-1) & d\theta_{n-1} \\ d\theta_1 & \cdots & d\theta_{n-1} & -\frac{f}{(\text{o})} \end{vmatrix} = \text{o},$$

qui fera connaître f. On trouve ainsi

$$(51)\qquad f = \frac{(\text{o})}{\text{D}'}\begin{vmatrix} (1,1) & \cdots & (1, n-1) & d\theta_1 \\ (2,1) & \cdots & (2, n-1) & d\theta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n-1, 1) & \cdots & (n-1, n-1) & d\theta_{n-1} \\ d\theta_1 & \cdots & d\theta_{n-1} & \text{o} \end{vmatrix},$$

D′ désignant le déterminant

$$|(ik)| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ainsi la forme quadratique $2(U+h)\sum\sum a_{ik}\,dq_i\,dq_k$, qui représente ce que l'on peut appeler le carré de l'*action élémentaire*, sera entièrement exprimée en fonction de θ et de ses dérivées par une formule où ne subsistera plus rien d'inconnu. Ce résultat comprend, comme nous l'avons annoncé, celui qui a été démontré au n° 534.

571. La variable t joue un rôle très effacé et disparaît presque complètement dans les raisonnements précédents. On aurait pu l'éliminer dès le début et retrouver ainsi, d'une autre manière, les résultats que nous venons d'établir. La question est assez importante pour que nous indiquions rapidement ce nouveau mode d'exposition.

On peut, en employant le principe des forces vives, faire disparaître le temps des équations de Lagrange. Si l'on pose, en effet,

$$2(T) = \sum\sum a_{ik}\,dq_i\,dq_k,$$

les équations de Lagrange s'écrivent comme il suit :

$$d\left[\frac{\partial(T)}{\partial\,dq_i}\,\frac{1}{dt}\right] - \frac{1}{dt}\,\frac{\partial(T)}{\partial q_i} - dt\,\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0.$$

Or on a, d'après le principe des forces vives,

$$dt = \sqrt{\frac{(T)}{U+h}}.$$

Si l'on porte cette valeur de dt dans les équations de Lagrange, elles prennent la forme

$$d\left[\frac{\partial(T)}{\partial\,dq_i}\,\frac{\sqrt{U+h}}{\sqrt{(T)}}\right] - \frac{\partial(T)}{\partial q_i}\,\frac{\sqrt{U+h}}{\sqrt{(T)}} - \frac{\sqrt{(T)}}{U+h}\,\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$$

ou, plus simplement,

$$(52) \qquad d\,\frac{\partial}{\partial\,dq_i}\sqrt{(U+h)(T)} - \frac{\partial}{\partial q_i}\sqrt{(U+h)(T)} = 0.$$

Ce sont celles auxquelles on serait conduit en égalant à zéro la variation première de l'intégrale

$$(53)\qquad \int_{(P_0)}^{(P_1)} \sqrt{(U+h)(T)} = \frac{1}{2}\int_{(P_0)}^{(P_1)} \sqrt{2(U+h)\sum\sum a_{ik}\,dq_i\,dq_k}.$$

Posons

$$(54)\qquad ds^2 = (2U+2h)\sum\sum a_{ik}\,dq_i\,dq_k;$$

ds désignera ce que nous avons appelé l'*action élémentaire*, et l'on voit que la solution du problème général de la Mécanique est ainsi ramenée à la recherche du maximum ou du minimum de l'intégrale

$$\int_{(P_0)}^{(P_1)} ds,$$

où ds^2 désigne une forme quadratique assujettie à la seule condition d'être *définie positive*. C'est en cela que consiste le principe de la moindre action; et l'on reconnaît immédiatement, grâce à ce principe, que le problème général de la Mécanique n'est qu'une extension à un nombre quelconque de variables du problème de la recherche des lignes géodésiques. C'est à ce point de vue que nous allons nous placer maintenant en prenant pour guide un beau Mémoire de M. Beltrami ([1]).

572. Étant donnée la forme quadratique

$$(55)\qquad ds^2 = \sum\sum a_{ik}\,dq_i\,dq_k,$$

si l'on fait un changement de variables qui donne

$$\sum\sum a_{ik}\,dq_i\,dq_k = \sum\sum b_{ik}\,dr_i\,dr_k,$$

on aura aussi, en introduisant deux systèmes de différentielles,

$$\sum\sum a_{ik}\,dq_i\,\delta q_k = \sum\sum b_{ik}\,dr_i\,\delta r_k.$$

([1]) E. Beltrami, *Sulla teorica generale dei parametri differenziali* (*Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, serie 2ª, t. VIII, p. 549; 1869).

Par suite, l'angle $(ds, \delta s)$, défini par l'équation

$$ds\, \delta s \cos(ds, \delta s) = \sum\sum a_{ik}\, dq_i\, \delta q_k, \tag{56}$$

sera un invariant. Dans le cas où la forme est définie, on s'assure aisément, par l'emploi d'une identité de Lagrange, que $\cos(ds, \delta s)$ est en valeur absolue inférieur à l'unité. Nous dirons que l'élément $(ds, \delta s)$ est l'*angle* des deux directions définies par les deux systèmes de différentielles d et δ. Deux directions seront *perpendiculaires* lorsqu'on aura

$$\sum\sum a_{ik}\, dq_i\, \delta q_k = 0. \tag{57}$$

Étant donnée une relation quelconque

$$\varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0, \tag{58}$$

elle définira ce que nous appellerons une *surface*. Supposons que $q_1, \ldots, q_n$ varient sans cesser de satisfaire à cette équation ; leurs différentielles devront, à chaque instant, vérifier la relation

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\, \delta q_i = 0. \tag{59}$$

Nous réserverons le nom de *ligne* à l'ensemble des valeurs de $q_1, \ldots, q_n$ qui sont des fonctions données d'un paramètre variable t. Nous ne considérerons dans ce Chapitre que des lignes et des surfaces. Une ligne et une surface ont, en général, un nombre limité d'éléments communs. La condition d'orthogonalité de deux lignes ayant un élément commun sera exprimée par la formule (57), où les caractéristiques d et δ se rapportent respectivement aux déplacements effectués sur les deux lignes.

Si une ligne et une surface ont un élément commun, nous dirons que la ligne est *normale à la surface* lorsqu'elle sera normale à toutes les lignes de la surface contenant l'élément commun. Pour qu'il en soit ainsi, il faudra que l'on ait

$$\sum\sum a_{ik}\, dq_i\, \delta q_k = 0, \tag{60}$$

la différentielle d se rapportant à un déplacement sur la ligne et la différentielle δ à un déplacement sur la surface. Si la surface est représentée par l'équation (58), les différentielles δq_i satisfont à la seule condition (59). Il faudra donc que les coefficients des différentielles δq_i dans les deux équations (57) et (59) soient proportionnels. On est ainsi conduit au système

$$\sum_k a_{ik}\frac{dq_k}{ds} = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{61}$$

où λ est un facteur de proportionnalité.

Si on le résout par rapport aux dérivées $\frac{dq_k}{ds}$, on obtient les valeurs suivantes

$$\frac{dq_i}{ds} = \lambda\sum_k \frac{A_{ik}}{D}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}, \tag{62}$$

les symboles A_{ik} et D désignant les quantités déjà définies, c'est-à-dire le déterminant $|a_{ik}|$ et ses mineurs du premier ordre.

Comme on a

$$\sum a_{ik}\frac{dq_i}{ds}\frac{dq_k}{ds} = 1, \tag{63}$$

la multiplication des équations (61) et (62) donnera

$$\lambda^2\sum\sum\frac{A_{ik}}{D}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k} = 1.$$

En posant ici encore

$$\Delta\theta = \sum\sum\frac{A_{ik}}{D}\frac{\partial\theta}{\partial q_i}\frac{\partial\theta}{\partial q_k}, \tag{64}$$

on trouvera

$$\lambda^2 = \frac{1}{\Delta\varphi}. \tag{65}$$

Si l'on remarque maintenant que l'ensemble des termes qui multiplient $\frac{\partial q_i}{\partial s}$ dans l'équation (63) est égal, d'après la formule (61), à $\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}$, on peut encore écrire cette équation sous la forme suivante

$$\lambda\sum\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{dq_i}{ds} = 1,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{d\varphi}{ds}, \tag{66}$$

la différentielle $d\varphi$ se rapportant à un déplacement qui s'effectue sur la courbe normale à la surface. La comparaison des formules (65) et (66) nous donne donc

$$\Delta\varphi = \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2, \tag{67}$$

et cette expression montre immédiatement que $\Delta\varphi$ est un invariant (¹).

573. Ce fait essentiel peut aussi être établi de la manière suivante. Considérons la forme quadratique ds^2 et cherchons la fonction m, telle que la différence

$$ds^2 - \frac{d\theta^2}{m},$$

considérée comme fonction de $dq_1, \ldots, dq_n$, se réduise à une somme de $n - 1$ carrés. Si l'on prend les dérivées de la différence précédente par rapport à $dq_1, dq_2, \ldots, dq_n$, on obtient les n équations

$$\sum_k a_{ik} dq_k - \frac{1}{m} \frac{\partial\theta}{\partial q_i} d\theta = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dont le déterminant devra être nul. On peut leur adjoindre l'équation

$$\sum \frac{\partial\theta}{\partial q_i} dq_i - d\theta = 0,$$

qui définit $d\theta$. En éliminant $d\theta, dq_1, \ldots, dq_n$, on est conduit à une équation qui donne précisément

$$m = \Delta\theta.$$

La fonction m étant, d'après sa définition même, un invariant, il en sera de même de $\Delta\theta$.

(¹) E. Beltrami, *Mémoire cité.*

574. Puisque la différence

$$ds^2 - \frac{d\theta^2}{\Delta\theta}$$

se réduit à une somme de $n-1$ carrés, qui sont même positifs quand la forme est définie positive, on est conduit à introduire l'élément (θ, ds) défini par l'équation

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\Delta\theta}} = ds \sin(\theta, ds). \tag{68}$$

L'élément (θ, ds) sera dit l'*angle* de la surface (θ) et de la courbe à laquelle se rapportent les différentielles dq_i. Cette définition est d'accord avec celle que nous avons déjà donnée plus haut pour l'orthogonalité, puisque alors on aura, d'après la relation (67),

$$\sin^2(\theta, ds) = 1.$$

De l'invariant $\Delta\theta$ on déduit immédiatement le suivant ([1])

$$\Delta(\theta, \theta_1) = \sum\sum \frac{A_{ik}}{D} \frac{\partial\theta}{\partial q_i} \frac{\partial\theta_1}{\partial q_k}, \tag{69}$$

qui est le coefficient de 2λ dans le développement de $\Delta(\theta + \lambda\theta_1)$, ordonné suivant les puissances de la constante λ.

Cela nous conduit à introduire encore l'élément (θ, θ_1) défini par la formule

$$\cos(\theta, \theta_1) = \frac{\Delta(\theta, \theta_1)}{\sqrt{\Delta\theta}\sqrt{\Delta\theta_1}}, \tag{70}$$

qui sera l'*angle des deux surfaces* (θ), (θ_1).

En résumé, nous avons défini, au moyen des invariants qui se sont présentés successivement, l'angle de deux lignes, de deux surfaces, d'une ligne et d'une surface. On vérifiera aisément que

---

([1]) On peut donner pour $\Delta(\theta, \theta_1)$ une formule analogue à l'équation (67). On a, en effet,

$$\Delta(\theta, \theta_1) = \sqrt{\Delta\theta}\, \frac{d\theta_1}{ds},$$

la différentielle d se rapportant à un déplacement normal à la surface (θ).

ces angles ne changent pas lorsque la forme est multipliée par une fonction quelconque des variables indépendantes. Si l'on considère des lignes et des surfaces ayant un élément commun, l'angle d'une ligne et d'une surface est le complément de l'angle que fait la ligne avec la direction normale à la surface ; l'angle de deux surfaces est égal à celui des lignes qui leur sont normales. Des calculs élémentaires établissent ces propositions, qu'il était aisé de prévoir et que le lecteur vérifiera sans peine.

575. Nous allons maintenant indiquer une conséquence intéressante de l'un des résultats précédents. Nous avons vu que la différence

$$ds^2 - \frac{d\theta^2}{\Delta\theta} \tag{71}$$

est toujours réductible à une somme de $n-1$ carrés

$$P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_{n-1}^2.$$

Égalons à zéro chacun de ces carrés ; nous aurons un système d'équations différentielles

$$B_{i1}\,dq_1 + \ldots + B_{in}\,dq_n = 0,$$

au nombre de $n-1$. Désignons par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ les $n-1$ intégrales de ce système, c'est-à-dire les fonctions qui, égalées à des constantes, donnent les relations les plus générales entre les valeurs de $q_1, \ldots, q_n$ qui satisfont à ces équations. On aura évidemment $n-1$ identités de la forme suivante :

$$P_i = C_{i1}\,d\theta_1 + C_{i2}\,d\theta_2 + \ldots + C_{i,n-1}\,d\theta_{n-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1);$$

et, par suite, la différence (71) prendra la forme

$$ds^2 - \frac{d\theta^2}{\Delta\theta} = f_1(d\theta_1, \ldots, d\theta_{n-1}),$$

f_1 désignant une forme quadratique des $n-1$ différentielles $d\theta_i$.

Cette égalité ne peut exister que si les fonctions $\theta, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ sont indépendantes les unes des autres ; et, par suite, en les substituant aux variables primitives, on pourra exprimer $\Delta\theta$ et les coefficients de f_1 en fonction de $\theta, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$.

Ainsi, *par un changement de variables qui exige seulement l'intégration de $n-1$ équations différentielles ordinaires, on peut toujours ramener la fonction quadratique ds^2 à la forme suivante*

$$(72)\qquad ds^2 = \frac{d\theta^2}{\Delta\theta} + f_1(d\theta_1, \ldots, d\theta_{n-1}),$$

où θ est une fonction arbitrairement choisie, assujettie à l'unique condition que $\Delta\theta$ ne soit pas nul.

En particulier, si l'on a

$$\Delta\theta = 1,$$

on trouvera

$$(73)\qquad ds^2 = d\theta^2 + f_1(d\theta_1, \ldots, d\theta_{n-1}).$$

Cette remarquable proposition, à laquelle on pourrait aisément ramener la précédente, est due à M. Beltrami. Elle joue dans la théorie des formes à n variables le même rôle que la proposition de Gauss relative aux lignes géodésiques (n[os] 519 et 531).

On peut définir d'une manière élégante le système des équations différentielles dont l'intégration fera connaître les $n-1$ fonctions θ_i lorsqu'on aura choisi la fonction θ. Il suffit, pour cela, de s'appuyer sur les propriétés d'invariance du symbole $\Delta(\theta, \theta_1)$.

Si l'on cherche, en effet, les fonctions u satisfaisant à l'équation

$$\Delta(\theta, u) = 0,$$

on trouve aisément, en calculant $\Delta(\theta, u)$ avec le second membre de l'équation (73), que l'équation précédente se réduit à la forme simple

$$\frac{\partial u}{\partial\theta} = 0.$$

Par suite, elle admet les $n-1$ intégrales indépendantes θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$. Il suffira donc d'écrire avec les variables primitives l'équation linéaire

$$(74)\qquad \Delta(\theta, u) = \frac{1}{D}\sum\sum A_{ik}\frac{\partial\theta}{\partial q_i}\frac{\partial u}{\partial q_k} = 0;$$

les $n-1$ intégrales indépendantes de cette équation linéaire se-

ront les fonctions que l'on devra associer à θ pour obtenir le nouveau système de variables.

Si la fonction quadratique ds^2 est telle qu'il existe une équation aux dérivées partielles

$$\Delta\theta = \text{U}, \tag{75}$$

que l'on puisse intégrer complètement, U étant d'ailleurs une fonction de $q_1, \ldots, q_n$ choisie comme on le voudra, on pourra lui donner sans intégration et d'une infinité de manières la forme

$$ds^2 = \frac{d\theta^2}{\text{U}} + f_1(d\theta_1, \ldots, d\theta_{n-1}). \tag{76}$$

Car soit θ une intégrale complète de l'équation (75); en différentiant les deux membres de cette équation par rapport à l'une quelconque c_i des constantes qui entrent dans θ, on trouvera

$$\Delta\left(\theta, \frac{\partial\theta}{\partial c_i}\right) = 0,$$

et, par suite, $\dfrac{\partial\theta}{\partial c_1}, \ldots, \dfrac{\partial\theta}{\partial c_{n-1}}$ seront les différentes intégrales de l'équation linéaire (74). Ce sont là, sous une forme un peu différente, les résultats fondamentaux de Jacobi.

576. Les transformations que nous venons de signaler vont nous permettre de traiter le problème déjà posé plus haut relativement au minimum de l'intégrale

$$\int ds,$$

prise entre deux systèmes de valeurs extrêmes donnés. Pour conserver l'analogie, nous donnerons le nom de *géodésiques* à toutes les lignes qui nous donneront une des solutions de ce problème. Il est clair d'ailleurs que ces solutions sont invariantes, c'est-à-dire qu'elles subsistent lorsqu'on change les variables indépendantes.

D'après cela, nous supposerons d'abord que l'on ait choisi ces variables de la manière suivante : $n - 1$ des variables, $y_1, \ldots, y_{n-1}$ seront telles que les équations

$$y_1 = \text{C}_1, \quad \ldots, \quad y_{n-1} = \text{C}_{n-1} \tag{77}$$

définissent, *quelles que soient les constantes* C_i, une solution du problème, c'est-à-dire une ligne géodésique. La dernière variable θ sera simplement une fonction indépendante des précédentes. Pour plus de simplicité on peut supposer que θ soit la valeur de l'intégrale $\int ds$ comptée sur chacune des lignes géodésiques (77) à partir d'une origine fixe, mais quelconque. Alors ds^2 prendra la forme

$$(78)\qquad ds^2 = d\theta^2 + 2(a_1\, dy_1 + \ldots + a_{n-1}\, dy_{n-1})\, d\theta + \sum\sum b_{ik}\, dy_i\, dy_k.$$

Prenons θ comme variable indépendante et posons

$$s' = \frac{ds}{d\theta},$$

$$y'_i = \frac{dy_i}{d\theta}.$$

En égalant à zéro la variation première de l'intégrale

$$\int ds = \int s'\, d\theta,$$

nous aurons les équations

$$\frac{d}{d\theta}\frac{\partial s'}{\partial y'_i} - \frac{\partial s'}{\partial y_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Si nous écrivons qu'elles sont vérifiées par l'hypothèse

$$dy_1 = dy_2 = \ldots = dy_{n-1} = 0,$$

nous trouverons les équations

$$\frac{\partial a_i}{\partial \theta} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

qui s'intègrent immédiatement et donnent

$$(79)\qquad a_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}), \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ainsi, *il faut et il suffit que tous les coefficients a_i soient indépendants de* θ.

D'après cela, considérons sur le lieu, défini par l'équation $\theta = 0$, qui contient les points de départ de toutes les géodésiques

$$y_i = \text{const.}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

une courbe quelconque; et cherchons l'angle de cette courbe avec la géodésique qui passe en un de ses points. On a, pour la géodésique,

$$d\theta = ds,$$
$$dy_1 = dy_2 = \ldots = dy_{n-1} = 0,$$

et pour la courbe

$$\delta\theta = 0,$$

$\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_{n-1}$ étant quelconques. L'angle ω de ces deux lignes, qui est défini en général par la formule (56), aura donc ici la valeur donnée par l'équation

$$(80) \qquad \cos\omega = \frac{a_1\,\delta y_1 + a_2\,\delta y_2 + \ldots + a_{n-1}\,\delta y_{n-1}}{\sqrt{\sum\sum b_{ik}\,\delta y_i\,\delta y_k}}.$$

Pour que les lignes géodésiques soient normales au lieu géométrique ($\theta = 0$) qui leur sert de point de départ, il faut et il suffit que l'expression précédente de $\cos\omega$ soit nulle pour toutes les valeurs des différentielles δy_i, c'est-à-dire que l'on ait, pour $\theta = 0$,

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0.$$

Mais, comme ces coefficients ne contiennent pas θ, *ils seront alors identiquement nuls*.

Ainsi, *si des lignes géodésiques sont normales à une surface quelconque* ($\theta = 0$), *tous les coefficients a_i disparaissent dans l'expression* (78); *ds^2 prend la forme suivante*

$$(81) \qquad ds^2 = d\theta^2 + f_1(dy_1, \ldots, dy_{n-1}),$$

et, par suite, les lignes géodésiques sont aussi normales à toutes les surfaces

$$\theta = \text{const.}$$

que l'on obtient en portant sur chacune d'elles à partir de son point d'incidence une longueur donnée.

Telle est la proposition démontrée par M. Beltrami. Elle s'applique aussi au cas où l'on considère toutes les lignes géodésiques passant par un même point; car, si l'on prend ce point pour origine des arcs, on doit avoir, d'après la définition même de θ,

$$ds = d\theta, \qquad \text{pour} \qquad \theta = 0,$$

quelles que soient les variables y_i. Par suite, les coefficients a_i et b_{ik} doivent s'annuler pour $\theta = 0$. Mais, comme les premiers a_i ne contiennent pas θ, ils seront identiquement nuls. Ainsi :

Si, sur toutes les géodésiques passant par un point, on porte des longueurs égales, à partir de ce point, le lieu géométrique de l'extrémité de ces longueurs est normal à toutes les géodésiques.

577. Les théorèmes précédents, qui constituent une généralisation de la théorie de Gauss, mettent immédiatement en évidence le résultat suivant, déjà établi aux nos 531 et 532 pour le cas de deux variables.

La détermination des lignes géodésiques de la forme quadratique et l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta\theta = 1$$

constituent deux problèmes équivalents. La résolution de l'un entraîne nécessairement celle de l'autre.

Il ne nous reste plus qu'un mot à ajouter en ce qui concerne le problème le plus général de la Mécanique. Il revient, nous l'avons déjà remarqué, à la détermination des lignes géodésiques de la forme

$$(82) \qquad dS^2 = (U + h)\sum\sum a_{ik}\, dq_i\, dq_k = (U + h)\, ds^2.$$

Si l'on remarque maintenant que le paramètre différentiel $\Delta\theta$ évalué relativement à dS^2 est égal au quotient par $U + h$ du même

paramètre différentiel relativement à ds^2, on reconnaîtra immédiatement que la solution du problème de Mécanique se ramène à l'intégration de l'équation

$$\Delta\theta = U + h, \tag{83}$$

Δ étant le paramètre différentiel par rapport à ds^2.

D'après la remarque que nous avons déjà faite (nº 574), les angles des lignes et des surfaces sont les mêmes par rapport aux deux formes dS^2 et ds^2. En tenant compte de ce résultat, on peut étendre au problème général de la Mécanique les deux propositions relatives à l'orthogonalité que nous avons démontrées d'après M. Beltrami dans le numéro précédent. On retrouvera ainsi deux théorèmes que M. Lipschitz a énoncés dans le Mémoire que nous avons déjà signalé plus haut et auquel nous renverrons le lecteur.

TABLE DES MATIÈRES

DE LA SECONDE PARTIE.

LIVRE IV.

LES CONGRUENCES ET LES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

CHAPITRE I.

CHAPITRE II.

CHAPITRE XIII.

CHAPITRE XIV.

CHAPITRE XV.

LIVRE V.

DES LIGNES TRACÉES SUR LES SURFACES.

CHAPITRE I.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA SECONDE PARTIE.